

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

168

Ον/μο:.....

Γ' Λυκείου

Ύλη:Συναρτήσεις-Παράγωγοι

27-11-2016

### ΘΕΜΑ Α

**A1.α)** Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (μον.7)

**β)** Ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης; Δώστε ένα παράδειγμα για να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (μον.3)

**A2.** Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (μον.5)

**A3.** Κυκλώστε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. Αν η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $[a, b]$  με  $f(a) < f(b)$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) > 0$ . Σ Λ

2. Η γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη. Σ Λ

3. Είναι:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \varepsilon\phi\frac{\pi}{6}}{h} = \frac{4}{3}$ . Σ Λ

4. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  τότε και συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Σ Λ

5. Αν  $x(t)$  είναι η συνάρτηση θέσης ενός υλικού σημείου και ισχύει  $x''(t) = 0$  τότε το υλικό σημείο είναι ακίνητο. Σ Λ

6. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και η ευθεία  $y = \lambda x + \mu$  έχει δύο κοινά σημεία με την  $C_f$ , τότε υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$  ώστε  $f'(\xi) = \lambda$ . Σ Λ

7. Ισχύει  $(f(x_0))' = f'(x_0)$ . Σ Λ

8. Αν μια ευθεία έχει με την  $C_f$  μόνο ένα κοινό σημείο, τότε είναι οπωσδήποτε εφαπτομένη της. Σ Λ

9. Αν δύο συναρτήσεις τέμνονται τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται κοινή εφαπτομένη. Σ Λ

10. Η  $f(t) = \eta \mu t + 2x$  έχει παράγωγο  $f'(t) = \sigma \nu t + 2$  Σ Λ

(μον.10)

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $h(x) = 672x^3 + 2x - 85$ .

**B1.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\alpha > 0$  τέτοιο, ώστε  $h(\alpha) = 0$ . (μον.5)

**B2.** Δίνονται επιπλέον οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Αν είναι γνωστό ότι η ευθεία  $y = x + \alpha$  εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ , τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $F = h \circ f$  στο σημείο με τετμημένη  $x = 0$ . (μον.6)

2. Να βρείτε το  $\alpha$ , αν είναι γνωστό ότι η ευθεία ( $\varepsilon$ ) είναι παράλληλη στην ευθεία ( $\eta$ ):  $y = 506x + 2017$ . (μον.5)

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{h(x) + 85}{x^v} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$  για τις διάφορες ακέραιες τιμές του  $v$ . (μον.9)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: A = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{xy - 1}{xy}, \quad \forall x, y \in A, x \neq y.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ . (μον.4)

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη, με  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, x \in A$ . (μον.6)

**Γ3.** Να βρείτε την  $f(x)$  αν είναι γνωστό ότι  $f(1) = 2$ . (μον.4)

Στη συνέχεια για  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

**Γ4.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να λύσετε την εξίσωση:  $f(x^2 - x + 1) + f(x^2 + x + 1) = 4$  (μον.6)

**Γ5.** Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f'(x) + f(x^2)}$ . (μον.5)

## **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία

$$\text{ισχύει ότι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( f \left( 1 + \frac{2}{x} \right) - f \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) = 1.$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f'(1) = 1$ . (μον.6)

**Δ2.** Θεωρούμε επί πλέον τη συνάρτηση  $g$  που ορίζεται απ' την ισότητα  $g(x) = f(e^x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(1, f(1))$  εφάπτεται της  $C_g$  στο  $B(0, g(0))$ . (μον.4)

Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι  $g(x) = x^2 + x$

**Δ3.** Να δείξετε ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = \ln^2 x + \ln x + 1, x > 0$  και να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$ . (μον.4)

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση:  $f'(e^x) = e^{-2x}$ . (μον.5)

**Δ5.** Αν  $\alpha < \beta < \gamma$  και  $g(\alpha) < g(\gamma) < g(\beta)$  να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \gamma)$  ώστε  $g'(\xi) = 0$ . (μον.6)

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

## Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

### ΘΕΜΑ Α

**A1, A2** Θεωρία

**A3.** 1Σ, 2Σ, 3Σ, 4Λ, 5Λ, 6Σ, 7Λ, 8Λ, 9Λ, 10Λ.

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Η  $h$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική και  $h(0) = -85$ ,  $h(1) = 589$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\alpha \in (0,1)$ , άρα  $\alpha > 0$ , ώστε  $h(\alpha) = 0$ .

Το  $\alpha$  είναι μοναδικό γιατί η  $h$  έχει  $h'(x) = 2016x^2 + 2 > 0$ , είναι επομένως γνησίως αύξουσα.

**B2.**

1. Κατ' αρχάς είναι  $F'(x) = (h(f(x)))' = h'(f(x)) \cdot f'(x)$ .

Αφού η ευθεία  $y = x + \alpha$  εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  θα είναι  $f'(0) = 1$  και  $f(0) = \alpha$ .

Η εφαπτομένη της  $C_F$  στο σημείο με τετμημένη  $x = 0$  έχει εξίσωση  $\epsilon: y - h(f(0)) = h'(f(0)) \cdot f'(0) \cdot (x - 0)$  δηλ.

$\epsilon: y - h(\alpha) = (2016\alpha^2 + 2) \cdot x$  δηλ.  $\epsilon: y = (2016\alpha^2 + 2) \cdot x$

2. Αφού  $(\epsilon) \parallel (\eta)$ , έχουν, κατ' αρχάς, ίδιο συντελεστή διεύθυνσης

δηλ.  $2016\alpha^2 + 2 = 506 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4}$  και αφού  $\alpha > 0$  είναι  $\alpha = \frac{1}{2}$ , τιμή για την οποία είναι πράγματι  $(\epsilon) \parallel (\eta)$ .

**B3.** Απλοποιώ τον τύπο της συνάρτησης. Έχω:

$$\frac{h(x) + 85}{x^v} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = \frac{672x^3 + 2x}{x^v} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = \frac{672x^2 + 2}{x^v} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} v = 2 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{672x^2 + 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{672x^2}{x^2} = 672 \\ \bullet \text{Αν: } v > 2 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{672x^2 + 2}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{672x^2}{x^v} = 0 \\ v < 2 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{672x^2 + 2}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{672x^2}{x^v} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{h(x) + 85}{x^v} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \begin{cases} 672, & \alpha\nu v=2 \\ 0, & \alpha\nu v>2 \\ +\infty, & \alpha\nu v<2 \end{cases}$$

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Διακρίνω τις περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} \bullet \text{Αν } \begin{matrix} 0 < x \leq 1 \\ 0 < y \leq 1 \end{matrix} &\stackrel{(\odot)}{\Rightarrow} 0 < xy < 1 \Rightarrow \frac{xy-1}{xy} < 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \Rightarrow f \downarrow \text{ στο } (0,1] \\ \bullet \text{Αν } \begin{matrix} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{matrix} &\stackrel{(\odot)}{\Rightarrow} xy > 1 \Rightarrow \frac{xy-1}{xy} > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \Rightarrow f \uparrow \text{ στο } [1, +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{Γ2. Είναι: } \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{x \rightarrow y} \frac{xy - 1}{xy} = \frac{y^2 - 1}{y^2} = 1 - \frac{1}{y^2}, \forall y > 0,$$

$$\text{άρα } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, x > 0$$

$$\text{Γ3. Είναι: } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{x} + c \stackrel{f(1)=2 \Rightarrow c=0}{\Leftrightarrow} f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$$

Γ4. Ισχύει  $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$  γιατί ισοδύναμα είναι

$x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ , που ισχύει, με το  $=$  να ισχύει για  $x=1$ . Το σύνολο τιμών λοιπόν της  $f$  είναι  $f(A) = [2, +\infty)$ .

Η εξίσωση  $f(x^2 - x + 1) + f(x^2 + x + 1) = 4$  είναι καλά ορισμένη  $\forall x \in \mathbb{R}$ , αφού  $x^2 - x + 1 > 0$  και  $x^2 + x + 1 > 0$ .

Επειδή το ελάχιστο της  $f$  είναι το 2 θα είναι:

$$\begin{aligned} f(x^2 - x + 1) = 2 = f(1) &\Rightarrow x^2 - x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \\ f(x^2 + x + 1) = 2 = f(1) &\Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Γ5. Έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f'(x) + f(x^2)} =$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{1 - \frac{1}{x^2} + x^2 + \frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{1}{x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \\ &= 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η παράσταση  $x \left( f\left(1 + \frac{2}{x}\right) - f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$  γράφεται:

$$\begin{aligned} x \left( f\left(1 + \frac{2}{x}\right) - f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) &= \frac{f\left(1 + \frac{2}{x}\right) - f\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = y}{=} \frac{f(1+2y) - f(1+y)}{y} = \\ &= \frac{f(1+2y) - f(1) + f(1) - f(1+y)}{y} = 2 \frac{f(1+2y) - f(1)}{2y} - \frac{f(1+y) - f(1)}{y} \end{aligned}$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( f\left(1 + \frac{2}{x}\right) - f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( 2 \frac{f(1+2y) - f(1)}{2y} - \frac{f(1+y) - f(1)}{y} \right) =$$

$$= 2f'(1) - f'(1) = f'(1) \text{ και λόγω της υπόθεσης } f'(1) = 1.$$

Δ2. Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(1, f(1))$  έχει εξίσωση:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow \varepsilon_f : y = x + f(1) - 1$$

Η εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $B(0, g(0))$  έχει εξίσωση:

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Rightarrow \varepsilon_g : y = x + f(1) - 1, \text{ γιατί απ' την}$$

$$g(x) = f(e^x) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) = f'(e^x) \cdot e^x \Rightarrow g'(0) = f'(1) = 1 \text{ και } g(0) = f(1) - 1.$$

Δ3. Έχουμε:  $f(e^x) - 1 = x^2 + x \xRightarrow{x=\ln y} f(y) - 1 = \ln^2 y + \ln y \Rightarrow$

$$f(y) = \ln^2 y + \ln y - 1, \forall y > 0 \text{ άρα } f(x) = \ln^2 x + \ln x - 1, x > 0$$

$$\text{και } f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x + 1}{x} \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x f'(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{x \cdot (2 \ln x + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{2 \ln x + 1} \stackrel{\ln x = u}{=} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2 + u + 1}{2u + 1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{2u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{2} = +\infty \end{aligned}$$

Δ4. Η εξίσωση  $f'(e^x) = e^{-2x}$  έχει προφανή ρίζα το 0 και γράφεται:

$$\frac{2x+1}{e^x} = e^{-2x} \Leftrightarrow 2x+1 = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - 2x - 1 = 0$$

Η συνάρτηση  $g(x) = e^{-x} - 2x - 1$  είναι γνησίως φθίνουσα άρα η ρίζα  $x=0$  είναι μοναδική

Δ5. Για την  $g$  ισχύουν:

- είναι συνεχής στα  $[α, β]$  και  $[β, γ]$
- είναι παραγωγίσιμη στα  $(α, β)$  και  $(β, γ)$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχουν  $\xi_1 \in (α, β), \xi_2 \in (β, γ)$ :

$$g'(\xi_1) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0 \text{ και } g'(\xi_2) = \frac{g(\gamma) - g(\beta)}{\gamma - \beta} < 0.$$

Για την  $g'$  ισχύουν:

- είναι συνεχής στο  $[\xi_1, \xi_2]$
- $g'(\xi_1) \cdot g'(\xi_2) < 0$

και σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) : g'(\xi) = 0$ .