ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

167

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις **2-10-2016**

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Έστω δύο συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού Α, Β αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g; **(4μον.)**

Α2. Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)$ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης ισούται με $P(x_0)$. **(3μον.)**

Α3. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών. **(8μον.)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)** τις προτάσεις :

α. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, οι συναρτήσεις g, h έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(g(x)) = f(h(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε οι συναρτήσεις g, h είναι ίσες. **Σ Λ**

β. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. **Σ Λ**

γ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Σ Λ**

δ. Αν $0 \le f(x) \le \frac{1}{x} + e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. **Σ Λ**

ε. Αν οι συναρτήσεις f , g δεν είναι συνεχείς στο σημείο x_o του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε η συνάρτηση f+g δεν είναι συνεχής στο x_o . **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1-e^{x}\right)-\ln\left(1+e^{x}\right)$.

B1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=(-\infty,0)$. **(5μον.)**

B2. Να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in A$. **(5μον.)**

B3. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in A$. **(5μον.)**

B4. Να βρείτε την αντίστροφη της f. **(5μον.)**

B5. Να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-1)x^{3}+x^{2}+6}{f(-3)x^{2}-x-2}$ και το όριο

$B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{f(x)}-e^{f^{-1}(x)}\right)$. **(5μον.)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^{3}+\beta x^{2}+\gamma x,\ \alpha\neq 0$ για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{3}+x+1}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-1$.

1. Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ. **(μον.4)**

2. Για $\alpha=1,\ \beta=-3$ και $\gamma=2$ να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)}-1\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu^{2}f(x)\right)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot f(x+1)}{x^{2}}$. **(μον.3x3=9)**

Γ2. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:(0,2)\to R$,για την οποία ισχύουν:

$\lim_{x\to 2}(x-2)\cdot f(x)=-\frac{3}{2}$ και $\lim_{x\to 0}x\cdot f(x)=-\frac{1}{2}$.

1.Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x)=f(x)+\ln x-1,\ x\in(0,2)$. **(μον.4)**

2.Να αποδείξετε ότι η ευθεία y=x τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^{1-f(x)}$ ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,2)$. **(μον.4)**

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας $\alpha\in(1,\sqrt{2})$ τέτοιος ώστε: $f(\alpha)=\dfrac{f(1)+2f\left(\sqrt{2}\right)}{3}$. **(μον.4)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:

• $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$ • $f^2(x)=1+2xf(x)$, για κάθε $x\in R^*$.

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f. **(μον.7)**

Δ2. Αν $f(x)=\sqrt{1+x^2}+x$, $\kappa,\lambda\in R^*$ και κ+λ=1 να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\kappa}{x+1}+\frac{\lambda}{x+2}\right)\cdot f(x)=2$. **(μον.5)**

Δ3.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)-x}{x-\alpha}+\frac{1+2xf(x)}{x-\beta}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β). **(μον.6)**

Δ4.Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$.

1.Να μελετήσετε τη μονοτονία της g και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(μον.4)**

2.Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in R_+$ ισχύει $g(g(x)\geq\sqrt{2}$. **(μον.3)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Θεωρία
Α2. Θεωρία
Α3. Θεωρία
Α4. α. Σ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Για να ορίζεται η f πρέπει:

$1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$ και

$1+e^x>0$ που ισχύει. Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A=(-\infty,0)$.

Β2. Η f μετασχηματίζεται και γίνεται $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)$ και είναι

$\dfrac{1-e^x}{1+e^x}<1$ εφόσον $1-e^x<1+e^x$, οπότε $\ln\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)<0,\ \forall x<0$,

δηλαδή $f(x)<0$.

Β3. Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$x_1<x_2 \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2} \Leftrightarrow 1-e^{x_1}>1-e^{x_2} \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$\ln\left(1-e^{x_1}\right)>\ln\left(1-e^{x_2}\right)$ **(1)**

Ομοίως,

$x_1<x_2 \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow 1+e^{x_1}<1+e^{x_2} \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln\left(1+e^{x_1}\right)<\ln\left(1+e^{x_2}\right) \Leftrightarrow$

$-\ln\left(1+e^{x_1}\right)>-\ln\left(1+e^{x_2}\right)$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1), (2)** προκύπτει $f(x_1)>f(x_2)$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

B4. Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα , θα είναι 1-1 δηλαδή αντιστρέφεται. Για την αντίστροφη λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x.

Είναι:

$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)=y \Leftrightarrow \frac{1-e^x}{1+e^x}=e^y \Leftrightarrow 1-e^x=\left(1+e^x\right)e^y \Leftrightarrow$$

$$1-e^x=e^y+e^ye^x \Leftrightarrow e^ye^x+e^x=1-e^y \Leftrightarrow e^x\left(1+e^y\right)=1-e^y \Leftrightarrow$$

$$e^x=\frac{1-e^y}{1+e^y} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1-e^y}{1+e^y}\right).$$

Όπου πρέπει x<0, δηλαδή $\ln\left(\frac{1-e^y}{1+e^y}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{1-e^y}{1+e^y}<1$ που ισχύει και

$\frac{1-e^y}{1+e^y}>0 \Leftrightarrow 1-e^y>0 \Leftrightarrow e^y<1 \Leftrightarrow y<0$.

Επομένως η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$ με πεδίο ορισμού το $B=(-\infty,0)$.

B5. Είναι $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-1)x^3+x^2+6}{f(-3)x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-1)x^3}{f(-3)x^2}=\frac{f(-1)}{f(-3)}\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

γιατί από το Β2 γνωρίζουμε ότι $f(x)<0$, $\forall x<0$, άρα $\frac{f(-1)}{f(-3)}>0$.

Επίσης, $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{f(x)}-e^{f^{-1}(x)}\right)\underset{f(x)=f^{-1}(x)}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{f(x)}-e^{f(x)}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

1.Είναι $\frac{f(x)}{x}=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2$

άρα $\gamma=2$.

Είναι $\frac{f(x)}{x^3+x+1}=\frac{\alpha x^3+\beta x^2+2x}{x^3+x+1}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3+\beta x^2+2x}{x^3+x+1}=1\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3}{x^3}=1\Rightarrow \alpha=1$.

Είναι $f(x)=x^3+\beta x^2+2x$ με $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\beta+3$.Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$

θα είναι <u>κατ' αρχάς</u> $\beta=-3$.Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-3x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x-2)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}x(x-2)=-1.$$

Αρα $\beta=-3$.

2.

α)Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{f(x)}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{f(x)}-1}{\frac{1}{f(x)}}\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{===}\lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0.$$

β)Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 f(x)\right)\cdot\eta\mu\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu^2 f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{f(x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=0\cdot 1=0 \text{ γιατί:}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\overset{f(x)=u}{===}\lim_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{===}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)\cdot f(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(x+1)}{x}=2\cdot(-1)=-2$ γιατί

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x}\overset{x+1=u}{===}\lim_{u\to1}\frac{f(u)}{u-1}=-1.$$

Γ2.

1. Θέτω $\varphi(x)=(x-2)\cdot f(x)$ οπότε για $x\neq2$ είναι $f(x)=\frac{\varphi(x)}{x-2}\Rightarrow$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{\varphi(x)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}\cdot\varphi(x)=(-\infty)\cdot(-\frac{3}{2})=+\infty.$$

Θέτω $t(x)=x\cdot f(x)$ οπότε για

$x\neq0$ είναι $f(x)=\frac{t(x)}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{t(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot t(x)=$

$=(+\infty)\cdot(-\frac{1}{2})=-\infty$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (0,2) ως πράξεις συνεχών και γνησίως αυξουσών συναρτήσεων. Έχει επομένως σύνολο τιμών το $h((0,2))=(\lim\limits_{x\to0^+}h(x),\lim\limits_{x\to2^-}h(x))=(-\infty,+\infty)$.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $e^{1-f(x)}=x\Leftrightarrow\ln(e^{1-f(x)})=\ln x\Leftrightarrow$ $1-f(x)=\ln x\Leftrightarrow f(x)+\ln x-1=0\Leftrightarrow h(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο (0,2).

Αυτό συμβαίνει γιατί η h έχει σύνολο τιμών που περιέχει το 0 και είναι γνησίως αύξουσα.

3.Εχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 1=1<\sqrt{2} \\ 1<\sqrt{2}=\sqrt{2} \end{array}\right| \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} f(1)=f(1)<f(\sqrt{2}) \\ f(1)<f(\sqrt{2})=f(\sqrt{2}) \end{array}\right| \underset{\cdot(2)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} f(1)=f(1)<f(\sqrt{2}) \\ 2f(1)<2f(\sqrt{2})=2f(\sqrt{2}) \end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$3f(1)<f(1)+2f(\sqrt{2})<3f(\sqrt{2}) \overset{:(3)}{\Rightarrow} f(1)<\frac{f(1)+2f(\sqrt{2})}{3}<f(\sqrt{2}).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\alpha\in(1,\sqrt{2})\subset(0,2)$ ώστε $f(\alpha)=\dfrac{f(1)+2f(\sqrt{2})}{3}$.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, το α είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Απ΄την ισότητα $f^2(x)=1+2xf(x)$, προκύπτει:

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+1 .$$

Επειδή το $x^2+1>0$, δηλ. δεν μηδενίζεται και η $(f(x)-x)^2$ δεν μηδενίζεται, άρα ούτε η $f(x)-x$.Επειδή είναι και συνεχής θα διατηρεί πρόσημο. Θα είναι λοιπόν

$f(x)-x=\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)-x=-\sqrt{x^2+1}$, δηλ.

$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, με $x\neq 0$.

Μας λείπει το $f(0)$.

Ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$.

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-1}{x}=g(x)$ οπότε $f(x)=x\cdot g(x)+1$ και επειδή η f είναι συνεχής θα ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot g(x)+1)=1$.

Ο τύπος λοιπόν της f είναι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}, x\in R$

Δ2.Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\kappa}{x+1}+\dfrac{\lambda}{x+2}\right)\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\kappa}{x+1}+\dfrac{\lambda}{x+2}\right)\cdot(x+\sqrt{x^2+1})=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\kappa}{x+1}+\frac{\lambda}{x+2}\right)\cdot x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\kappa\cdot x}{x+1}+\frac{\lambda\cdot x}{x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)= \ =(\kappa+\lambda)\cdot 2=1\cdot 2=\ 2$$

Δ3.Η εξίσωση $\dfrac{f(x)-x}{x-\alpha}+\dfrac{1+2xf(x)}{x-\beta}=0$ **(1)** ισοδύναμα γράφεται:

$(x-\beta)(f(x)-x)+(x-\alpha)(1+2xf(x))=0$ **(2)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x-\beta)(f(x)-x)+(x-\alpha)(1+2xf(x))$

•η h είναι συνεχής στο [α,β] ως πράξεις συνεχών.

•$h(\alpha)=(\alpha-\beta)(f(\alpha)-\alpha)<0$

•$h(\beta)=(\beta-\alpha)(1+2\beta f(\beta))=(\beta-\alpha)f^2(\beta)>0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της h στο (α,β).

Η εξίσωση (2) λοιπόν ,άρα και η (1),έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

Δ4.α)

Έχουμε: $g(x)=f(x)-x=\sqrt{1+x^2}$.

•Αν $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ και $x_1<x_2\Rightarrow x_1^2>x_2^2\Rightarrow 1+x_1^2>1+x_2^2\Rightarrow$ $\sqrt{1+x_1^2}>\sqrt{1+x_2^2}\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

•Αν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ και $x_1<x_2\Rightarrow x_1^2<x_2^2\Rightarrow 1+x_1^2<1+x_2^2\Rightarrow$ $\sqrt{1+x_1^2}<\sqrt{1+x_2^2}\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η g είναι συνεχής και έχει ελάχιστη τιμή το 1,για x=0.

Αρα έχει σύνολο τιμών το $g(R)=[1,+\infty)$.

β)

Είναι $g(x) \geq 1$ και $g \uparrow$ στο $[0,+\infty)$ άρα $g(g(x)) \geq g(1) \Rightarrow g(g(x)) \geq \sqrt{2}$