ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

166

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Ολη **8-5-2016**

ΘΕΜΑ Α

A1.Εστω $f: A \to R$ και g: $B \to R$.Να δώσετε τον ορισμό της σύνθεσης της f με την g. **(μον.4)**

A2.Εστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α. Τι ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης f; **(μον.4)**

A3.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\nu, \nu \in N^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \nu \cdot x^{\nu-1}$. **(μον.7)**

A4.Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1.Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με f(x)<0 για κάθε $x \in \Delta$, τότε η η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. Σ Λ

2.Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$ και $f(x) \neq \beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$. Σ Λ

3.Αν $y = \alpha x + \beta$,τότε ο ρυθμός μεταβολής των τιμών του y εξαρτάται από τις τιμές της μεταβλητής x. Σ Λ

4.Αν για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = e^x \cdot \eta\mu 4$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ

5.Ισχύει: $\int_0^\alpha x f'(x)dx = \alpha f(\alpha) - \int_0^\alpha f(x)dx$. Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ και για κάθε x>0 ισχύει η σχέση $F(x)-G(x)=\ln x-x+1$ όπου F,G αρχικές των f και g αντίστοιχα.

Β1. Αν η C_g τέμνει τον $x'x$ στα σημεία ρ_1,ρ_2 αντίστοιχα με $0<\rho_1<1<\rho_2$, να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε σημείο ρ με $\rho_1<\rho<\rho_2$. **(μον.6)**

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f'(\xi)\cdot\xi^2=-1$ **(μον.6)**

Β3. Αν η f είναι κοίλη, να δείξετε ότι και η g είναι κοίλη και να βρείτε (αν υπάρχουν)τα ακρότατα της g. **(μον.7)**

Β4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f,C_g και της x=e. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^1 \varepsilon\varphi(xt)dt$ με $x\in[0,\frac{\pi}{2})$

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της f. **(μον.4)**

Γ2. Αν $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x} & ,0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=[0,+\infty)$. **(μον.7)**

Γ3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την y=2016 σε ένα σημείο και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f. **(μον.4)**

Γ4. Αν $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ και α<β να δείξετε ότι $(\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\beta}>(\sigma\upsilon\nu\beta)^{\alpha}$. **(μον.5)**

Γ5. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ και $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $M(1,\alpha^{\eta\mu x})$, $N(1+\eta\mu x,1)$ με $x\in R$, $\alpha>0$, M' το συμμετρικό του Μ ως προς τον $x'x$ και N' το συμμετρικό του Ν ως προς τον $y'y$ για τα οποία ισχύει ότι $(NM')\geq(MN')$, $\forall x\in R$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι $1+\eta\mu x-\alpha^{\eta\mu x}\leq 0$, $\forall x\in R$ **(μον.4)**

Δ2.Να αποδείξετε ότι α=e. **(μον.4)**

Δ3.Δίνεται παραγωγίσιμη, μη σταθερή συνάρτηση $g:[0,1]\to R$ με συνεχή την g', $g(0)=1$ και $\forall x\in[0,1]$ ισχύει:

$$\int_0^1[g'(x)]^2dx+\int_0^1 g^2(x)dx+1=g^2(1).$$

1.Να δείξετε ότι $\int_0^1[g'(x)-g(x)]^2dx=0$. **(μον.5)**

2.Να βρείτε τον τύπο της g. **(μον.3)**

Δ4. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $H(x)-H(0)=g(x)\cdot f(x)+x-1, \forall x\in R$ **(1)**.
Αν η g έχει τύπο $g(x)=e^x$ και H(x) αρχική της $g(x)\cdot f(x)$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. **(μον.5)**

Δ5.Δείξτε ότι το εμβαδόν E(t) του χωρίου που περικλείεται απ' την C_f, τον $x'x$, τον $y'y$ και την $x=t$, t>0 αυξάνει με μειούμενο ρυθμό και βρείτε το $\lim_{t\to+\infty}E(t)$. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις(Ενδεικτικές)

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1, Α2, Α3 Θεωρία

Α4. 1Σ, 2Σ, 3Λ, 4Λ, 5Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1.Απ' την $F(x)-G(x)=\ln x - x + 1$ παραγωγίζω τα μέλη της και έχω

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x}-1$ **(1)** οπότε $f(x)=g(x)+\dfrac{1}{x}-1$

●Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

●
$$\left.\begin{array}{l} f(\rho_1)=g(\rho_1)+\dfrac{1}{\rho_1}-1=\dfrac{1}{\rho_1}-1=\dfrac{1-\rho_1}{\rho_1}>0 \\ f(\rho_2)=g(\rho_2)+\dfrac{1}{\rho_2}-1=\dfrac{1}{\rho_2}-1=\dfrac{1-\rho_2}{\rho_2}<0 \end{array}\right| \overset{\theta.B}{\Rightarrow} \exists \rho\in(\rho_1,\rho_2): f(\rho)=0$$

Β2.Η (1)$\Rightarrow g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}+1$ και από θ.Rolle για την g προκύπτει ότι:

$$\exists \xi\in(\rho_1,\rho_2): g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)+\frac{1}{\xi^2}=0 \Rightarrow f'(\xi)\cdot\xi^2=-1$$

Β3.Η f είναι κοίλη $\Rightarrow f' \searrow \Rightarrow$ η $g'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x^2}\searrow$ ως άθροισμα των

$f'(\searrow)$ και $\dfrac{1}{x^2}(\searrow)$. Άρα η g είναι κοίλη και απ' τον πίνακα φαίνεται ότι η g έχει στο ξ ολικό μέγιστο.

x	0 ξ	$+\infty$
g'	$\searrow$ +	$\searrow$ −
g	$\nearrow$	$\searrow$

ο.μ.=gξ)

Β4.Θα βρούμε το άλλο άκρο ολοκλήρωσης που είναι η ρίζα της

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$ άρα

$$E=\int_1^e |f(x)-g(x)|dx=\int_1^e\left|\frac{1}{x}-1\right|dx=\int_1^e(1-\frac{1}{x})dx=[x-\ln x]_1^e=$$

$$=(e-1)-(1-\ln 1)=e-2\ .$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εχουμε:

$$f(x)=\int_0^1 \varepsilon\varphi(xt)dt \overset{xt=u\Rightarrow}{\underset{xdt=du}{=\!=\!=\!=}} \int_0^x \varepsilon\varphi u\cdot\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^x \varepsilon\varphi u du=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\eta\mu u}{\sigma\upsilon\nu u}du=$$

$$=\frac{1}{x}[-\ln(\sigma\upsilon\nu u)]_0^x=-\frac{1}{x}\cdot\ln(\sigma\upsilon\nu x) \text{ δηλ. } f(x)=-\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x},\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

Επίσης $f(0)=\int_0^1 \varepsilon\varphi(0\cdot t)dt=0$. Αρα $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x}, & x\in(0,\dfrac{\pi}{2})\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

Γ2. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[-\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x}]\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{LH}{=\!=}}\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x})=\lim\limits_{x\to0^+}(\varepsilon\varphi x)=0=f(0)$.

Η f λοιπόν είναι συνεχής στο 0. Επίσης είναι συνεχής στο $(0,\frac{\pi}{2})$

ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Αρα η f είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2})$.

Είναι $f'(x)=[-\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x}]'=-\dfrac{\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}x-\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}=\dfrac{x\varepsilon\varphi x+\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}$.

Θεωρώ $g(x)=x\varepsilon\varphi x+\ln(\sigma\upsilon\nu x)$ οπότε $g'(x)=\varepsilon\varphi x+x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\varepsilon\varphi x=$

$=\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$ άρα $g\nearrow \overset{x>0}{\Rightarrow} g(x)>g(0)=0\Rightarrow f'(x)>0\to f\nearrow$,

άρα $f([0,\frac{\pi}{2}))=[0,+\infty)$ γιατί $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[-\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x}]=\dfrac{+\infty}{\frac{\pi}{2}}=+\infty$.

Γ3. Το $2016\in f(A)$ άρα η C_f τέμνει την οριζόντια ευθεία y=2016 σε ένα σημείο, μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$ η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=\frac{\pi}{2}$.

Δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη αφού $A=[0,\frac{\pi}{2})$.

Γ4.Είναι $\alpha<\beta \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\alpha)<f(\beta) \Rightarrow -\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\alpha} < -\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta} \Rightarrow$

$\beta\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) > \alpha\ln(\sigma\upsilon\nu\beta) \Rightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\beta} > \ln(\sigma\upsilon\nu\beta)^{\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\beta} > (\sigma\upsilon\nu\beta)^{\alpha}$

Γ5.Αφού η f είναι συνεχής στο [α, β] θα έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (M) τιμή, και επειδή η f είναι $\nearrow$ υπάρχουν

$$x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]: \left.\begin{matrix} m \le f(x_1) < M \\ m < f(x_2) \le M \end{matrix}\right| \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} m^2 < f(x_1)\cdot f(x_2) < M^2 \Rightarrow$$

$$m < \sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)} < M \Rightarrow \exists \xi \in (\alpha,\beta): f(\xi) = \sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.Είναι $M'(1,-\alpha^{\eta\mu x})$, $N'(-1-\eta\mu x,1)$, οπότε η $(NM') \ge (MN') \Rightarrow$

$$\sqrt{(1-1-\eta\mu x)^2+(-\alpha^{\eta\mu x}-1)^2} \ge \sqrt{(-2-\eta\mu x)^2+(1-\alpha^{\eta\mu x})^2} \Rightarrow \ldots$$

(μετά τις αντίστοιχες πράξεις) $1+\eta\mu x-\alpha^{\eta\mu x} \le 0$.

Δ2. Η $\varphi(x)=1+\eta\mu x-\alpha^{\eta\mu x}$ έχει, σύμφωνα με το Δ1, μέγιστη τιμή το 0, και αυτό συμβαίνει στη θέση $x=\kappa\pi,\ \kappa\in Z$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι $\varphi'(\kappa\pi)=0$.

Είναι $\varphi'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\alpha^{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln\alpha$ άρα

$\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi)-\alpha^{\eta\mu(\kappa\pi)}\cdot\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi)\cdot\ln\alpha=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi)\cdot(1-\alpha^{\eta\mu(\kappa\pi)}\cdot\ln\alpha)=0$

$(\pm1)\cdot(1-\alpha^0\cdot\ln\alpha)=0 \Rightarrow 1-\ln\alpha=0 \Rightarrow \alpha=e$.

Σχόλιο: Κάνουμε επαλήθευση…

Δ3. 1.Εχουμε:

$$\int_0^1[g'(x)-g(x)]^2dx = \int_0^1[g'(x)]^2dx+\int_0^1 g^2(x)dx-\int_0^1 2g'(x)g(x)dx \overset{(\upsilon\pi)}{=}$$

$$= g^2(1)-1-[g^2(x)]_0^1 = g^2(1)-1-(g^2(1)-g^2(0)) = 0.$$

Είναι λοιπόν $\int_0^1[g'(x)-g(x)]^2dx=0$

2.Απ' το (Δ1) είναι $\int_0^1[g'(x)-g(x)]^2dx=0$ άρα

$$[g'(x)-g(x)]^2=0 \Leftrightarrow g'(x)=g(x) \Leftrightarrow g(x)=c\cdot e^x \underset{c=1}{\overset{g(0)=1}{\Rightarrow}} g(x)=e^x.$$

Δ4. Η $H(x)-H(0)=g(x)\cdot f(x)+x-1$ γράφεται:

$$H(x)-H(0)=e^{x}\cdot f(x)+x-1 \overset{\pi\alpha\rho.}{\Rightarrow} (H(x))'-(H(0))'=e^{x}\cdot f(x)+x-1$$

$$\Leftrightarrow e^{x}\cdot f(x)=e^{x}\cdot f(x)+e^{x}\cdot f'(x)+1 \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{x}=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-e^{-x} \Leftrightarrow f'(x)=(e^{-x})' \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}+c_2 \underset{c_2=0}{\overset{f(0)=1}{\Rightarrow}} f(x)=e^{-x}.$$

Σχόλιο: Κάνουμε επαλήθευση…

Δ5. Είναι: $E(t)=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^t |e^{-x}|dx=\int_0^t e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^t=-e^{-t}+1.$

Επειδή $E'(t)=e^{-t}>0$ και $E''(t)=-e^{-t}<0$ το εμβαδόν αυξάνει με μειούμενο ρυθμό.

Τέλος $\lim\limits_{t\to+\infty}E(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(-e^{-t}+1)=0+1=1.$