ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

165

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Παράγωγοι-Ολοκλήρώματα **20-3-2016**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν F μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:

●όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\ c\in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

●κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$. **(μον.10)**

Α2. Δώστε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. **(μον.5)**

Α3. Να εξηγήσετε αν είναι σωστές ή λάθος οι προτάσεις.

1. Αν $F_1,\ F_2,\ F_3$ είναι τρείς παράγουσες της f τότε οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν παράλληλες εφαπτόμενες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0.

2.Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν είναι 1-1 τότε η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον $x'x$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο.

3.Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, τότε $\int_\alpha^\gamma f(x)dx>\int_\beta^\gamma f(x)dx$ με $\gamma\in(\alpha,\beta)$.

4.Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α, β], τότε η f παίρνει δύο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

5.Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$ $,x>4$ έχει αρχικές τις $F(x)=\ln(4-x)+c$. **(μον.10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\left[f'(x)-f(x)\right](x^2+4)=2xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο σημείο Α(0,f(0)) εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\dfrac{1}{4}x+4$

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x(x^2+4)$ **(μον.8)**

Β2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο Α δεν μπορεί να έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f **(μον.7)**

Β3. Έστω η συνάρτηση F**,** αρχική της f.
Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{F'(t)}{e^{2t}}$ **(μον.4)**

Β4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1 **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x)=$\dfrac{e^x+x}{e^x-x}$ **(μον.4)**

β) Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{e^x+x}{e^x-x}dx\le\frac{e+1}{e-1}$ **(μον.7)**

Γ2. α)Να βρείτε συνεχή συνάρτηση για την οποία ισχύει: $\displaystyle\int_0^1 f(x)(x-f(x))dx=\frac{1}{12}$ **(μον.8)**

β)Αν $f(x)=\dfrac{1}{2}x$ βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)\cdot\int_0^x(t+\eta\mu t)dt}{x^4}$ **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R, η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα και $\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 g(t)dt$.

Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $F(x) - F(0) + G(2-x) - G(2) \geq x^2 - 2x$, όπου F, G αρχικές των f, g αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι:

Δ1.οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη που βρίσκεται στο διάστημα (0,2). **(μον.5)**

Δ2.είναι $f(0) + f(2) = g(0) + g(2)$. **(μον.5)**

Δ3.υπάρχει $x_1 \in (0,2)$ έτσι ώστε $f(x_1) = g(2 - x_1)$. **(μον.5)**

Δ4.υπάρχει $x_2 \in (0,2)$ έτσι ώστε $f'(x_2) + g'(2 - x_2) = 2$. **(μον.5)**

Δ5.Αν $f(x) - g(2-x) - h(x) = 0$, h συνεχής συνάρτηση στο [0,2] να αποδείξετε ότι $\int_0^2 h(x)dx = 0$. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2 Θεωρία

Α3.

1.Σωστό γιατί: $F_1'(x_o)=F_2'(x_o)=F_3'(x_o)=f(x_0)$

2.Σωστό γιατί:

Αφού η f δεν είναι 1-1, υπάρχουν $x_1\neq x_2$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)$ και από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε $f'(\xi)=0$

3.Σωστό γιατί: $\int_\alpha^\gamma f(x)dx-\int_\beta^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

4.Σωστό γιατί:

Αν η f δεν είχε δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές θα ήταν f(x)>0 ή f(x)<0 στο [α, β] οπότε θα ίσχυε και $\int_\alpha^\beta f(x)>0$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)<0$.

5.Λάθος γιατί:

Αν $F(x)=\ln(4-x)+c$ τότε $F'(x)=\dfrac{(4-x)'}{4-x}=-\dfrac{1}{4-x}\neq f(x)$

ΘΕΜΑ Β

Β1.Εχουμε ότι: $[f'(x)-f(x)](x^2+4)=2xf(x)$ **(1)** $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x^2+4)-f(x)(x^2+4)=2xf(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x)(x^2+4)-2xf(x)=f(x)(x^2+4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x)(x^2+4)-(x^2+4)'f(x)=f(x)(x^2+4)\overset{:(x^2+4)^2}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{x^2+4}\right]'=\frac{f(x)}{x^2+4}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x^2+4}=c\cdot e^x\Leftrightarrow f(x)=c(x^2+4)e^x \quad \textbf{(2)}$$

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο A(0,f(0)) είναι κάθετη στην $\varepsilon: y=-\dfrac{1}{4}x+4$ θα έχει συντελεστή $f'(0)=4$

Η (1) για $x=0\Rightarrow[4-f(0)]\cdot4=0\Leftrightarrow f(0)=4$

Απ' την (2) για $x=0\Rightarrow4=c\cdot4\Rightarrow c=1$. Αρα $f(x)=e^x(x^2+4)$

B2. Η f έχει $f'(x)=e^x(x^2+2x+4)$ και $f''(x)=e^x(x^2+4x+6)>0, \forall x\in R$ άρα είναι κυρτή. Η εφαπτομένη της λοιπόν στο $A(0,f(0))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f παρά μόνο το σημείο επαφής.

B3. Εχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F'(t)}{e^{2t}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(t)}{e^{2t}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^t(t^2+4)}{e^{2t}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t^2+4}{e^t}\overset{\frac{(\infty)}{(\infty)}}{\underset{LH}{=\!=}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2t}{e^t}\overset{\frac{(\infty)}{(\infty)}}{\underset{LH}{=\!=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^t}=0.$

B4. Είναι: $E=\int_0^1\left|e^x(x^2+4)\right|dx=\int_0^1 e^x(x^2+4)dx=\int_0^1(e^x)'(x^2+4)dx=$

$=[e^x(x^2+4)]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=5e-4-\int_0^1 2x(e^x)'dx=$

$=5e-4-[2xe^x]_0^1+\int_0^1 2e^x dx=5e-4-2e+2(e-1)=5e-6.$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

α) Οι συναρτήσεις e^x και x είναι βασικές (γνωστές) συναρτήσεις και από τις γραφικές τους παραστάσεις είναι φανερό ότι $e^x>x, \forall x\in R$. Αρα $A_f=R$.

β). Εχουμε: $f'(x)=\left(\dfrac{e^x+x}{e^x-x}\right)'=\ldots=\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$ με ρίζα $x=1$ και απ' τον πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	↗		↘

έχουμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο το $M=f(1)=\dfrac{e+1}{e-1}$.

Είναι λοιπόν

$$f(x)\le f(1)\Rightarrow\int_\alpha^{\alpha+1}\frac{e^x+1}{e^x-1}dx\le\int_\alpha^{\alpha+1}\frac{e+1}{e-1}dx\Rightarrow\int_\alpha^{\alpha+1}\frac{e^x+1}{e^x-1}dx\le\frac{e+1}{e-1}.$$

Γ2.

α) Εχουμε: $\int_0^1 f(x)(x-f(x))dx = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \int_0^1 [x f(x) - f^2(x)]dx = \frac{1}{12} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f^2(x) - 2f(x)\cdot\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}]dx = -\frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f(x) - \frac{x}{2}]^2 dx - \frac{1}{4}\int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f(x) - \frac{x}{2}]^2 dx - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{12} \Leftrightarrow \int_0^1 [f(x) - \frac{x}{2}]^2 dx = 0$$ άρα και

$$[f(x) - \frac{x}{2}]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x.$$

β) Εχουμε: $\frac{2f(x)\int_0^x (t+\eta\mu t)dt}{x^4} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\int_0^x (t+\eta\mu t)dt}{x^4} = \frac{x\cdot\int_0^x (t+\eta\mu t)dt}{x^4} =$

$$= \frac{\int_0^x (t+\eta\mu t)dt}{x^3} = \frac{[\frac{t^2}{2} - \sigma\upsilon\nu t]_0^x}{x^3} = \frac{\frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x^3}$$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 0 - 0\cdot 0 + 0 = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Ισχύει ότι $F(x)-F(0)+G(2-x)-G(2)\geq x^2-2x$ δηλ. ότι

$F(x)-F(0)+G(2-x)-G(2)-x^2+2x\geq 0$ **(1)**

Επίσης $\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 g(t)dt$ δηλ. $F(2)-F(0)=G(2)-G(0)$ **(2)**

Δ1.Θεωρώ την $\Phi(x)=F(x)-G(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi \text{ συνεχής στο } [0,2]\\ \Phi \text{ παραγωγ. στο } (0,2)\\ \Phi(0)=\Phi(2) \text{ λόγω}(2)\end{array}\right|\overset{\theta.R.}{\Rightarrow}\exists \text{ τ. ε. } x_0\in(0,2):\Phi'(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=g(x_0)$$

Το x_0 είναι μοναδικό γιατί η $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Θεωρώ την $H(x)=F(x)-F(0)+G(2-x)-G(2)-x^2+2x$ που έχει

$H'(x)=f(x)-g(2-x)-2x+2$ **(3)**

Λόγω της (1) η H έχει ελάχιστο στις θέσεις 0 και 2.Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι:

$H'(0)=0$ και $H'(2)=0$ δηλ. $f(0)-g(2)=-2$ και $f(2)-g(0)=2$ και με πρόσθεσή τους είναι:

$f(0)-g(0)+f(2)-g(2)=0\Leftrightarrow f(0)+f(2)=g(0)+g(2)$.

Δ3.Θεωρώ $T(x)=f(x)-g(2-x)$ και είναι:

$$\left.\begin{array}{l}T(0)=f(0)-g(2)=-2\\ T(2)=f(2)-g(0)=2\end{array}\right|\overset{\theta.B.}{\Rightarrow}\exists \text{τ.ε. } x_1\in(0,2):T(x_1)=0\Rightarrow$$

$f(x_1)=g(2-x_1)$.

Δ4.Από Θ.Μ.Τ. στην Τ προκύπτει ότι $\exists\, x_2\in(0,2)$:

$$T'(x_2)=\frac{T(2)-T(0)}{2-0}=\frac{2-(-2)}{2}=2\ \Rightarrow\ f'(x_2)-g'(2-x_2)=2\ .$$

Δ5.Εχουμε ότι $f(x)-g(2-x)-h(x)=0\Leftrightarrow f(x)-g(2-x)=h(x)$ **(3)**

Είναι: $\int_0^2 g(2-x)dx \underset{dx=-du}{\overset{2-x=u}{=\!=\!=\!=}} -\int_2^0 g(u)du=\int_0^2 g(u)du$ και η (3) γίνεται

$\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 g(x)=\int_0^2 h(x)dx=0$, αφού $\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 g(t)dt$.