# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**164**

**Ον/μο:………………..** **Γ΄ Λυκείου**

**Ύλη:Παράγωγοι** **14-2-2016**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ , $\alpha \in R-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο την $f'(x)=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. **(μον.10)**

**Α2**.Να δώσετε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης συνάρτησης f, στο $+\infty$. **(μον.5)**

**Α3.**Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

**1**.Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x σε διάστημα Δ τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

**2**.Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε $x\in R$ .

**3**.Τα τοπικά ακρότατα πολυωνυμικής συνάρτησης ορισμένης στο R αναζητούνται στις ρίζες της παραγώγου της.

4.Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, δεν έχει ασύμπτωτες.

**5**.Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ τότε
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$$ **(μον.10)**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

**Β1**.Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα σημεία καμπής της $C_f$ . **(μον.5)**

**Β2**.Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **(μον.4)**

**Β3**.Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $C_f$. **(μον.3)**

**Β4**.Να δείξετε ότι η εξίσωση $3f(x)=1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. **(μον.3)**

**Β5**.Αν $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$ οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Β4 να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2):\ 3f(\xi)+3\xi f'(\xi)=1$. (μον.5)

**Β6**.Να λύσετε στο διάστημα $(0,\dfrac{\pi}{2})$ την ανίσωση:

$(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}>(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}$. **(μον.5)**

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1**.Εστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β).Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[-1,2]$ και $f(\alpha)=0$ , $f(\beta)=1$ , να δείξετε ότι:

**α)**υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ **(μον.4)**

**β)**αν η $f'$ είναι συνεχής, η εξίσωση $f'(x)=(x^2+1)\cdot f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β). **(μον.5)**

**γ)**υπάρχει σημείο Μ(κ,f(κ)) στο οποίο η εφαπτομένη της $C_f$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση:

$\varepsilon$: $y=\dfrac{1}{\beta-\alpha}x+\mu,\ \mu\in\mathbb{R}$. **(μον.4)**

**Γ2.**Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f^3(x)+f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι:

**α)** αν $3\beta>\alpha^2$, η f είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.6)**

**β)**αν α+β=1, τότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της $C_f$ στο Μ(ξ,f(ξ)) να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-x+3$. **(μον.6)**

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:[0,+\infty)$, μία συνάρτηση , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=f'(0)=0$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$(e^x-\eta\mu x)\cdot(f''(x)+1)=2e^x+(\sigma\upsilon\nu x-e^x)\cdot f'(x),\ \forall x\geq 0$

**Δ1**.Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(e^x-\eta\mu x)$ **(μον.7)**

**Δ2**.Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **(μον.5)**

**Δ3.**Να δείξετε ότι στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η $C_f$ έχει μοναδικό σημείο καμπής. **(μον.6)**

**Δ4.**Αν F μία παράγουσα της f στο $[0,+\infty)$ να δείξετε ότι η εξίσωση

$$F(e^x+2)-F\left(\frac{3x+1}{x}\right)=F(e^x-1)-F\left(\frac{1}{x}\right)$$

έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$. **(μον.7)**

ΚΑΛΗ ΕΙΤΥΧΙΑ

**Απαντήσεις (Ενδεικτικές)**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1, Α2.** Θεωρία

**Α3**. 1Σ, 2Λ, 3Σ, 4Σ, 5Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$ και παράγωγο:

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ με ρίζα $x=e$ και

$$f''(x)=\frac{(1-\ln x)'\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot(x^2)'}{x^4}=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=$$

$$=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$ με ρίζα $x=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}=e\sqrt{e}$ .

Το πρόσημο της $f'$ ,της $f''$,η μονοτονία, η καμπυλότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον πίνακα:

| x | 0 | $A_1$ | e | $A_2$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $A_3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | − | | − | |
| $f''$ | | − | | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ ∩ | | ↘ ∩ | | ↘ ∪ | 0 |
| | | | τ.μ. | | σ.κ. | | |

**Β2.**Είναι: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{1}{x}\ln x)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{LH}{=\!=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x})=0$.

Η f είναι συνεχής και σύμφωνα με τον πίνακα του Β1, έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=$

$$=(\lim_{x\to0^+}f(x),f(e)]\cup[f(e^{\frac{3}{2}}),f(e)]\cup[f(e^{\frac{3}{2}}),\lim_{x\to+\infty}f(x))=$$

$$=(-\infty,\frac{1}{e}]\cup[\frac{3}{2e\sqrt{e}},\frac{1}{e}]\cup[\frac{3}{2e\sqrt{e}},0)=(-\infty,\frac{1}{e}].$$

**B3.**● Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, η x=0 (ο $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

● Αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, η y=0(ο $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

**B4**.Η εξίσωση $3f(x)=1$ ισοδύναμα γράφεται $f(x)=\frac{1}{3}$.

● Το $\frac{1}{3}\in f(A_1)$ άρα $\exists x_1\in A_1$ ώστε $f(x_1)=\frac{1}{3}$ , μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1$.

● Το $\frac{1}{3}\in f(A_2)$ άρα $\exists x_2\in A_2$ ώστε $f(x_2)=\frac{1}{3}$, μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2$.

● Το $\frac{1}{3}\notin f(A_3)$ , άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $A_3$.

Η εξίσωση $3f(x)=1$ λοιπόν έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες $x_1<x_2$ .

**B5.**Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=3xf(x)-x=x(f(x)-1)$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Η h είναι συνεχής στο } [x_1,x_2]\\ \text{Η h είναι παραγωγίσιμη στο } (x_1,x_2)\\ h(x_1)=h(x_2)\end{array}\right|\overset{\Theta.R.}{\Rightarrow}\exists\xi\in(x_1,x_2):h'(\xi)=0$$

δηλ. $3f(\xi)+3\xi f'(\xi)=1$ .

**B6**.Η ανίσωση γράφεται:

$$(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}>(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}\Leftrightarrow \ln(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}>\ln(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu x)>\eta\mu x\cdot\ln(\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow\frac{\ln(\eta\mu x)}{\eta\mu x}>\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow$$

$$f(\eta\mu x)>f(\sigma\upsilon\nu x)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}\eta\mu x>\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}>1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x>1$$

άρα $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ .

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1.**α)**Η f έχει ελάχιστο $m=f(x_1)$ και μέγιστο $M=f(x_2)$.

Αφού $f(\alpha)=0$ και f(β)=1 οι θέσεις ελάχιστου ($x_1$) και μέγιστου($x_2$) είναι εσωτερικά σημεία του [α, β].Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα του Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.

**β)**Η εξίσωση $f'(x)=(x^2+1)f(x)$ γράφεται $f'(x)-(x^2+1)f(x)=0$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)-(x^2+1)f(x)$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Η g είναι συνεχής στο } [x_1,x_2] \\ g(x_1)=f'(x_1)-(x_1^2+1)f(x_1)=0-(x_1^2+1)(-1)=x_1^2+1>0 \\ g(x_2)=f'(x_2)-(x_2^2+1)f(x_2)=0-(x_2^2+1)\cdot 2=-2(x_2^2+1)<0 \end{array}\right| \overset{\text{Θ.Β.}}{\Rightarrow}$$

υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε $g(\xi)=0$ δηλ. $f'(\xi)=(\xi^2+1)\cdot f(\xi)$.

**γ)** $$\left.\begin{array}{r} \text{Η f είναι συνεχής στο } [\alpha,\beta] \\ \text{Η f είναι παραγωγίσιμη στο } (\alpha,\beta) \end{array}\right| \overset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{\Rightarrow} \exists\kappa\in(\alpha,\beta) \text{ ώστε}$$

$$f'(\kappa)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{1-0}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\beta-\alpha}=\lambda_\varepsilon$$

Αρα η εφαπτομένη της $C_f$ στο M(κ,f(κ)) είναι παράλληλη στην ε.

**Γ2.α)**Απ' την ισότητα $f^3(x)+f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x,\ \forall x\in R$, με παραγώγιση των μελών της έχουμε:

$$3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta \Leftrightarrow$$

$$[3f^2(x)+1]\cdot f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta \Leftrightarrow f'(x)=\frac{3x^2+2\alpha x+\beta}{3f^2(x)+1}>0$$

γιατί το τριώνυμο του αριθμητή έχει $\Delta=4\alpha^2-12\beta=4(\alpha^2-3\beta)<0$.

Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

**β)** Η εφαπτομένη της $C_f$ στο Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi)$.

Για να είναι κάθετη στην $\varepsilon: y=-x+3$ πρέπει $f'(\xi)\cdot(-1)=-1 \Leftrightarrow$

$f'(\xi)=1 \Leftrightarrow f'(\xi)-1=0$.

Θεωρώ την $h(x)=f(x)-x$.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Η h είναι συνεχής στο } [0,1] \\ \text{Η h είναι παραγωγίσιμη στο } [0,1] \\ h(0)=f(0)-0=0 \\ h(1)-1=f(1)-1=1-1=0\end{array}\right| \overset{\theta.R}{\Rightarrow} \exists \xi\in(0,1): h'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=1$$

(Είναι $f^3(1)+f(1)=1+\alpha+\beta \Leftrightarrow f^3(1)+f(1)-2=0 \overset{Hor.}{\Leftrightarrow} f(1)=1$)

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Η ισότητα $(e^x-\eta\mu x)\cdot(f''(x)+1)=2e^x+(\sigma\upsilon\nu x-e^x)\cdot f'(x),\ \forall x\geq 0$

γράφεται: $(e^x-\eta\mu x)\cdot f''(x)+(e^x-\eta\mu x)=2e^x+(\sigma\upsilon\nu x-e^x)\cdot f'(x) \Leftrightarrow$

$(e^x-\eta\mu x)\cdot f''(x)+(e^x-\eta\mu x)=2e^x-(e^x-\eta\mu x)'\cdot f'(x) \Leftrightarrow$

$(f'(x))'(e^x-\eta\mu x)+f'(x)(e^x-\eta\mu x)'=e^x+\eta\mu x \Leftrightarrow$

$[f'(x)(e^x-\eta\mu x)]'=(e^x-\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow f'(x)(e^x-\eta\mu x)=e^x-\sigma\upsilon\nu x+\alpha$ **(1)**

Επειδή $f(0)=f'(0)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha=0$ άρα $f'(x)(e^x-\eta\mu x)=e^x-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}\geq 0 \quad (e^x>\eta\mu x, e^x\geq\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{(e^x-\eta\mu x)'}{e^x-\eta\mu x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)=[\ln(e^x-\eta\mu x)]' \Leftrightarrow \Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x-\eta\mu x)+\beta$ **(2).**

Επειδή $f(0)=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \beta=0$, άρα $f(x)=\ln(e^x-\eta\mu x)$.

**Δ2.** Από το Δ1 ερώτημα είναι $f'(x)=\dfrac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}\geq 0$ (το = ισχύει για x=0)

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α=[0 +∞). Επομένως και $1-1$ άρα αντιστρέφεται. Η $f^{-1}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f .

Είναι $f(0)=\ln(e^0-\eta\mu 0)=\ln 1=0$

Επίσης . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x-\eta\mu x)] \overset{e^x-\eta\mu x=y}{=\!=\!=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln y)=+\infty$.

$(y\to+\infty$ γιατί: $-1\le \eta\mu x\le 1 \Rightarrow -1<-\eta\mu x<1\Rightarrow$
$e^x-1\le e^x-\eta\mu x\le e^x+1 \overset{\kappa.\pi.}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-\eta\mu x)=+\infty)$

Αρα $A_{f^{-1}}=f(A)=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=[0,+\infty)$ .

**Δ3.**Απ' την $f'(x)=\dfrac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}\Rightarrow$

$$f''(x)=\frac{(e^x+\eta\mu x)(e^x-\eta\mu x)-(e^x-\sigma\upsilon\nu x)(e^x-\sigma\upsilon\nu x)}{(e^x-\eta\mu x)^2}=$$

$$\frac{e^{2x}-\eta\mu^2 x-e^{2x}+2e^x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{(e^x-\eta\mu x)^2}=\frac{2e^x\sigma\upsilon\nu x-1}{(e^x-\eta\mu x)^2}.$$

Εστω $g(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x-1,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$ οπότε

$g'(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x-2e^x\eta\mu x=2e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$ με ρίζα $x=\dfrac{\pi}{4}$ .

Σχηματίζω τον πίνακα μεταβολών:

| $x$ | $0$ | $A_1$ | $\frac{\pi}{4}$ | $A_2$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $1$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-1$ |

$g(0)=1>0$ $\qquad g(\frac{\pi}{4})>0$ $\qquad g(\frac{\pi}{2})=-1<0$

Η g, άρα και η $f''$, έχει μόνο μία ρίζα στο $(0,\frac{\pi}{2})$ κι αυτή στο $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})=A_2$ εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο, άρα η $C_f$ έχει μόνο ένα σημείο καμπής στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

**Δ4**.Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$F((e^x-1)+3)-F\left(e^x-1\right)=F\left(\frac{1}{x}+3\right)-F\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textbf{(1).}$$

Θεωρώ την $G(x)=F(x+3)-F(x)$ **(2)** και η (1) γράφεται:

$$G(e^x-1)=G\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textbf{(3).}$$

Από την (2) έχουμε: $G'(x)=F'(x+3)-F'(x)=f(x+3)-f(x)>0$

γιατί $x+3>x$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η G λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1 −

Απ' την (3) ισοδύναμα έχουμε: $e^x-1=\frac{1}{x}\Leftrightarrow e^x-1-\frac{1}{x}=0$ **(4).**

Θα δείξω ότι η (4) έχει μοναδική ρίζα στο $A_1=(0,+\infty)$.

Θεωρώ την $w(x)=e^x-\frac{1}{x}-1, x>0$.

Έχει $w'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$

άρα η w είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών:

$w(A_1)=(\lim_{x\to 0^+}w(x), \lim_{x\to +\infty}w(x))=(-\infty,+\infty)=R$ στο οποίο περιέχεται το 0.

Η w λοιπόν , άρα και η εξίσωση (4) έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$