ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

163

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Όρια-Συνέχεια-Εφαπτομένη **29-11-2015**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και να δώσετε μια σχηματική ερμηνεία. **(μον.5)**

Α2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ **(μον.10)**

Α3. Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$ τότε $(f\circ g)(x)=-x,\ x\in R$. Σ Λ

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot \eta\mu\frac{1}{x})=1$ Σ Λ

3. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$ τότε υπάρχει $x_o\in(-1,1)$ ώστε $f(x_o)=\pi$. Σ Λ

4. Η $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ έχει δύο σημεία ασυνέχειας. Σ Λ

5. Αν οι f και g είναι συνεχείς στο x_o τότε και η $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_o. Σ Λ

6. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα. Σ Λ

7. $f'(3)=(f(3))'$. Σ Λ

8. $\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$. Σ Λ

9. $(5^{3x})'=5^{3x}\cdot\ln125$. Σ Λ

10. Η έβδομη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=(x^2-1)^3$ είναι ίση με 0. Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f^3(x)+5f(x)-e^x+1=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1.Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.7)**

Β2.Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f. **(μον.6)**

Β3.Να βρείτε τη συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$f(g(\ln x)-2)=f(x+\ln x-3)$ για κάθε x>0. **(μον.6)**

Β4.Να λύσετε την εξίσωση: $f(2^x)+f(3^x)=f(e^x)+f(\pi^x)$. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3$.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1}, να βρείτε τη μονοτονία της, τις ρίζες και το πρόσημό της. **(μον.4)**

Γ2.Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{f^{-1}(x)}{1+x^2}-x^3=0$. **(μον.4)**

Γ3.Να δείξετε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. **(μον.4)**

Γ4.Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο 2. **(μον.4)**

Γ5.Να υπολογίσετε τα όρια:

$K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f^{-1}(x)-x}{x\cdot f^{-1}(x)+\eta\mu x}$ και $\Lambda=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$. **(μον.6)**

Γ6.Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_o\in(0,1)$ ώστε $f^{-1}(1-f(x_o))=0$. **(μον.3)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Εστω $f:[0,+\infty)\to R$ μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει $x^2+1<f(x)<e^x,\ \forall x>0$.

1.Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **(μον.3)**

2.Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ ώστε:

$$\frac{1}{f(x_o)}+\frac{1}{x_o+1}=1 .$$ **(μον.3)**

3.Να βρείτε τα α, β ώστε $f(\alpha)+f(\beta)=2$ **(μον.3)**

Δ2.Εστω η συνεχής στο R συνάρτηση με την ιδιότητα

$f^2(x)-2f(x)\cdot \eta\mu x=\eta\mu^4 x+\eta\mu^2 x+1,\forall x\in R$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$.

1.Να βρείτε τον τύπο της f. **(μον.4)**

2.Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. **(μον.4)**

Δ3.Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(x)\neq 0$. Αν κ, λ θετικοί αριθμοί με κ+λ=1 να δείξετε ότι:

1.για κάθε $\gamma,\delta\in[\alpha,\beta]$, ισχύει $f(\gamma)\cdot f(\delta)>0$. **(μον.4)**

2.υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\xi)=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)$. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις(Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Θεωρία.

Α3. 1Σ, 2Σ, 3Σ, 4Λ, 5Λ, 6Σ, 7Λ, 8Σ, 9Σ, 10Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εχουμε ότι: $f^3(x)+5f(x)-e^x+1=0 \Leftrightarrow f^3(x)+5f(x)+1=e^x$ **(1)**

Θεωρούμε την $h(x)=x^3+5x+1$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Εστω $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \overset{(1)}{\Rightarrow} h(f(x_1))<h(f(x_2)) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β2. Η (1) για $x=0 \Rightarrow f^3(0)+5f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\cdot(f^2(0)+5)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

και λόγω της μονοτονίας της f , το 0 είναι μοναδική ρίζα.

Για το πρόσημο της f έχουμε:

- $x<0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0)=0$
- $x>0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)=0$

Β3. Απ' την $f(g(\ln x)-2)=f(x+\ln x-3)$

$\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} g(\ln x)-2=x+\ln x-3 \Leftrightarrow g(\ln x)=x+\ln x-1 \overset{\ln x=y}{\Leftrightarrow}$

$g(y)=e^y+y-1,\ y\in R$. Αρα $g(x)=e^x+x-1,\ x\in R$.

Β4. Η εξίσωση $f(2^x)+f(3^x)=f(e^x)+f(\pi^x)$ **(1)** έχει προφανή ρίζα το 0.

Έστω έχει κι' άλλη ρίζα ρ.

- Αν $\rho>0$ τότε:

$$\begin{cases} 2^\rho<e^\rho \\ 3^\rho<\pi^\rho \end{cases} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(2^\rho)<f(e^\rho) \\ f(3^\rho)<f(\pi^\rho) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(2^\rho)+f(3^\rho)<f(e^\rho)+f(\pi^\rho), \text{ άτοπο.}$$

- Αν $\rho<0$ τότε:

$$\begin{cases} 2^\rho>e^\rho \\ 3^\rho>\pi^\rho \end{cases} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(2^\rho)>f(e^\rho) \\ f(3^\rho)>f(\pi^\rho) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(2^\rho)+f(3^\rho)>f(e^\rho)+f(\pi^\rho), \text{άτοπο.}$$

Άρα το 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

●Η f έχει πεδίο ορισμού το A=R και αν

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^5 < x_2^5 \\ x_1^3 < x_2^3 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow$$ οπότε είναι και 1-1 αρα αντιστρέφεται.

Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το

$$A_{f^{-1}} = f(A) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = A_f$$

●Αν $y_1, y_2 \in A_{f^{-1}}$ με $y_1 < y_2 \Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

●΄Είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = f^{-1}(0)$ άρα η f^{-1} έχει ,λόγω και της μονοτονίας, μοναδική ρίζα το 0.

●Για το πρόσημο της f^{-1} έχουμε:

Αν $x < 0 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}(x) < f^{-1}(0) = 0$

Αν $x > 0 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}(x) > f^{-1}(0) = 0$.

Γ2.

Η εξίσωση $\dfrac{f^{-1}(x)}{1+x^2} - x^3 = 0$ ισοδύναμα γράφεται:

$x^5 + x^3 = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow x^5 + x^3 = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^5 + x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^4 + x^2 - 1 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0}$ ή

$x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ δεκτή η $x^2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x = \pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$

Γ3.

΄Εστω ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Ισχύει ότι $f(f^{-1}(x))=x$ άρα $[f(f^{-1}(x))]'=(x)'\Rightarrow f'\ (f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=1$

και για x=0 είναι

$f'\ (f^{-1}(0))\cdot(f^{-1})'(0)=1\Rightarrow f'(0)\cdot(f^{-1})'(0)=1\Rightarrow 0\cdot(f^{-1})'(0)=1\Rightarrow 0=1!$

΄Αρα η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ4.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ(1,2) έχει εξίσωση

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ δηλ. $y-2=8(x-1)\Leftrightarrow y=8x-6$.

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την y=x. Η εφαπτομένη λοιπόν της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της N(2,1) είναι συμμετρική της $y=8x-6$ ως προς την y=x. Εχει επομένως εξίσωση $x=8y-6\Leftrightarrow x-8y+6=0$

Γ5.

Είναι:

$$K=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot f^{-1}(x)-x}{x\cdot f^{-1}(x)+\eta\mu x}\overset{x=f(y)}{===}\lim_{y\to 0}\frac{f(y)\cdot y-f(y)}{f(y)\cdot y+\eta\mu f(y)}=\lim_{y\to 0}\frac{y-1}{y+\dfrac{\eta\mu f(y)}{f(y)}}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

και $$\Lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}\overset{x=f(y)}{===}\lim_{y\to-\infty}\frac{y-f(y)}{f(y)+y}=\lim_{y\to-\infty}\frac{y-y^5-y^3}{y^5+y^3+y}=\lim_{y\to-\infty}\frac{-y^5}{y^5}=-1$$

Γ6.

Η εξίσωση $f^{-1}(1-f(x))=0$ ισοδύναμα γράφεται

$$f^{-1}(1-f(x))=f^{-1}(0)\underset{1-1}{\overset{f^1}{\Leftrightarrow}}1-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)-1=0$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-1=x^5+x^3-1$

Είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και $h(0)=-1,\ h(1)=1$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o\in(0,1)$ ώστε $h(x_o)=0$

δηλ. $f^{-1}(1-f(x_o))=0$.

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ το x_o είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

1. Έχουμε ότι: $x^2+1<f(x)<e^x, \ \forall x>0$ **(1)**

Απ' το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Απ' την (1) έχουμε ότι $2<f(1)<e$

Επειδή η f είναι συνεχής είναι f(0)= $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, άρα f(0)<f(1).

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και f(0)<f(1) είναι γνησίως αύξουσα.
Η f λοιπόν είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ έχει επομένως σύνολο τιμών το $f([0,+\infty))=[f(0), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x))=[1,+\infty)$.

2. Θεωρώ την $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{x+1}-1$

Είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών.

Είναι : $g(0)=\dfrac{1}{f(0)}+1-1=1$ και $g(1)=\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{2}-1=\dfrac{1}{f(1)}-\dfrac{1}{2}<0$ γιατί

$2<f(1)<e$ άρα $\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{f(1)}<\dfrac{1}{2}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_o\in(0,1): g(x_o)=0$ δηλ. $\dfrac{1}{f(x_o)}+\dfrac{1}{x_o+1}=1$.

3. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[1,+\infty)$. Άρα $f(\alpha)\ge 1$ και $f(\beta)\ge 1$

Αλλά f(α)+f(β)=2 οπότε $f(\alpha)=1=f(0)$, $f(\beta)=1=f(0)\underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}$ α=β=0.

Δ2.

1. $f^2(x)-2f(x)\cdot \eta\mu x=\eta\mu^4 x+\eta\mu^2 x+1\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)\cdot \eta\mu x+\eta\mu^2 x=\eta\mu^4 x+2\eta\mu^2 x+1\Leftrightarrow$

$(f(x)-\eta\mu x)^2=(\eta\mu^2 x+1)^2$ **(1).**

Η $\eta\mu^2 x+1$ δεν μηδενίζεται άρα ούτε η $f(x)-\eta\mu x$ η οποία είναι και συνεχής.

΄Αρα διατηρεί πρόσημο, επομένως είναι:

$f(x)-\eta\mu x=\eta\mu^2 x+1$ ή $f(x)-\eta\mu x=-\eta\mu^2 x-1$ δηλ.

$f(x)=\eta\mu^2 x+\eta\mu x+1$ ή $f(x)=-\eta\mu^2 x+\eta\mu x-1$.

Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ δεκτή λύση είναι η $f(x)=\eta\mu^2 x+\eta\mu x+1$

2. Εχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^2 x+\eta\mu x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{x}\right)=$

$=0+0+0=0$.

(Είναι $0\le\eta\mu^2 x\le 1\Rightarrow 0\le\frac{\eta\mu^2 x}{x}\le\frac{1}{x}\overset{\kappa.\pi.}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^2 x}{x}=0$.)

Δ3.

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\neq 0$ άρα διατηρεί πρόσημο. ΄Ετσι οι τιμές της $f(\gamma)$, $f(\delta)$ είναι ομόσημοι αριθμοί , άρα ισχύει $f(\gamma)\cdot f(\delta)>0$.

2. Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β] έχει μέγιστη (Μ) και ελάχιστη (m) τιμή. Θα ισχύει λοιπόν:

$$\left.\begin{matrix} m\le f(\alpha)\le M \\ m\le f(\beta)\le M\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\kappa\cdot m\le\kappa\cdot f(\alpha)\le\kappa\cdot M \\ \lambda\cdot m\le\lambda\cdot f(\beta)\le\lambda\cdot M\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$(\kappa+\lambda)m\le\kappa\cdot f(\alpha)+\lambda\cdot f(\beta)\le(\kappa+\lambda)M\Rightarrow m\le\frac{\kappa\cdot f(\alpha)+\lambda\cdot f(\beta)}{\kappa+\lambda}\le M\Rightarrow$$

$m\le\kappa\cdot f(\alpha)+\lambda\cdot f(\beta)\le M$.

Αρα υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\xi)=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)$.