ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

162

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Όρια **Προσαν.**

04-10-15

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής για το όριο συνάρτησης στο x_0. **(μον.5)**

Α2. Να δείξετε ότι : $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. **(μον.6)**

Α3. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. **(μον.4)**

Α4. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις:

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \ell,\ \ell \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ή $-\ell$. **Σ Λ**

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot ημ\dfrac{1}{x}\right) = 1$. **Σ Λ**

3. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [2,7] \cup \{8\}$, τότε έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$. **Σ Λ**

4. Αν $g(x) \le f(x) \le h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell_2$, τότε $\ell_1 \le \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \ell_2$. **Σ Λ**

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. **Σ Λ**

6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$**,** τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. **Σ Λ**

7. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 2x}$ δεν υπάρχει, τότε $x_0 = 2$. **Σ Λ**

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^3-x^2-1\right|-x^3+x^2}{x^2}=0$. **Σ** **Λ**

9. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to5}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ τότε είναι ίσο με $f(5)\cdot g(5)$. **Σ** **Λ**

10. Το $\lim\limits_{x\to0}\left[\ln\left(x^3+x-1\right)\right]$ είναι καλά ορισμένο. **Σ** **Λ**

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}{1-x}$ **(μον.5)**

Β2. Βρείτε το όριο: $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{\eta\mu(2y-2x)}{8y^2-8x^2}, y\neq\pm x\neq0$ **(μον.5)**

Β3. Αν $f(x)=x^3+\alpha x^2+2x, \alpha\in R$,βρείτε το όριο:

$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ **(μον.5)**

Β4. Να βρείτε τα α και β ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο $x_0=2$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{3x-6}, & x>2\\ 5, & x=2\\ \dfrac{x^2-4}{x^3-8}, & x<2\end{cases}$$

(μον.5)

Β5. Για τις διάφορες τιμές του μ να βρείτε το όριο:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}+\mu x)$ **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x^2-x|+|x-4|-3x}{\sqrt{x-4}}$ **(μον.3)**

Γ2. Αν $f(x)=x^3-3x+2$ και $g(x)=|(x-\lambda)\cdot f(x)|$, βρείτε τους $\lambda\in R$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{g(x)-g(\lambda)}{x-\lambda}$ **(μον.5)**

Γ3. Αν $\alpha\cdot\eta\mu x+\beta\cdot\eta\mu 2x\le\gamma\cdot\eta\mu 3x, \forall x$ κοντά στο 0 , να αποδείξετε ότι: $\alpha+2\beta=3\gamma$ **(μον.5)**

Γ4. 1. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+k}-x)=0, k\in N^*$ **(μον.4)**

2. Βρείτε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}+\ldots\sqrt{x^2+100}-100x)$ **(μον.4)**

β. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{\ln^2 x+1}+\sqrt{\ln^2 x+2}+\ldots+\sqrt{\ln^2 x+100}-\ln x^{100})$ **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εστω συνάρτηση f ορισμένη στο R και για κάθε x στο R ισχύει: $x+|\eta\mu x|\le f(x)\le|x|+x$

1. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ **(μον.3)**

2. Βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(x)-\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}$ **(μον.5)**

3. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ δεν έχει όριο στο 0. **(μον.7)**

Δ2. Εστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x)+2f(x)=3\cdot\eta\mu 4x, \ \forall x\in R$

1. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ **(μον.6)**

2. Υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1 , Α2 , Α3 Θεωρία

Α4. 1Λ, 2Λ, 3Λ, 4Λ, 5Σ, 6Σ, 7Σ, 8Σ, 9Λ, 10Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}{1-x}\overset{1-x=y}{===}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(1-y)}{2}}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2})}{y}=$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\eta\mu\frac{\pi y}{2}}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\eta\mu\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}\cdot y}\cdot\frac{\pi y}{2}\right)=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Β2.Είναι:

$$\lim_{y\to x}\left[\frac{\eta\mu(2y-2x)}{8y^2-8x^2}=\left[\lim_{y\to x}\frac{\eta\mu(2y-2x)}{2y-2x}\cdot\frac{1}{2(2y+2x)}\right]=1\cdot\frac{1}{2\cdot 4x}=\frac{1}{8x}\right.$$

Β3. Είναι:

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3+\alpha x^2+2x-\alpha^3-\alpha^3-2\alpha}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)+\alpha(x-\alpha)(x+\alpha)+2(x-\alpha)}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}(x^2+\alpha x+\alpha^2+\alpha x+\alpha^2+2)=5\alpha^2+2$$

Β4. Για να υπάρχει το όριο της f στο $x_0=2$ πρέπει

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$. Είναι :

- $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{3x-6}=\dfrac{4+2\alpha+\beta}{0}$ και επειδή το όριο

είναι πραγματικός αριθμός πρέπει κατ' αρχάς $4+2\alpha+\beta=0$
δηλ $2\alpha+\beta=-4$ **(1)**

Τότε $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+\alpha x-4-2\alpha}{3x-6} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)+\alpha(x-2)}{3(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x+2+\alpha}{3}\right) = \dfrac{4+\alpha}{3}$

Πρέπει λοιπόν $\dfrac{1}{3}=\dfrac{4+\alpha}{3} \Leftrightarrow \alpha=-3$ και από την (1) προκύπτει β=2 .

B5.Εχουμε: $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}+\mu x=\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}+\mu x=$

$=|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\mu x = x\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\mu x = x\cdot(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\mu)$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\cdot(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\mu)]=(+\infty)\cdot(\mu+1)$

- Αν μ+1>0 $\Leftrightarrow \mu>-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Αν μ+1<0 $\Leftrightarrow \mu<-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- Αν μ+1=0 $\Leftrightarrow \mu=-1$ τότε έχουμε απροσδιοριστία $(+\infty)\cdot 0$ και την αντιμετωπίζουμε ως εξής:

$$f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x+2}-x)\cdot(\sqrt{x^2+3x+2}+x)}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}=$$

$$==\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}=\frac{x(3+\frac{2}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1)}=\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\dfrac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\dfrac{3}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι x>4 και έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-x)=12>0$ είναι και $x^2-x>0$ κοντά στο 4.

Ο τύπος της f γράφεται: $f(x)=\dfrac{x^2-x+x-4-3x}{\sqrt{x-4}}=\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{x-4}}=$

$=\dfrac{(x-4)(x-1)}{\sqrt{x-4}}=\sqrt{x-4}\cdot(x-1)$ οπότε $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=0$.

Γ2. Εχουμε $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{g(x)-g(\lambda)}{x-\lambda}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{|(x-\lambda)f(\lambda)|}{x-\lambda}=\begin{cases}|f(\lambda)|, \text{αν } x\to\lambda^+\\ -|f(\lambda)|, \text{αν } x\to\lambda^-\end{cases}$

και για να υπάρχει το όριο πρέπει

$|f(\lambda)|=-|f(\lambda)|\Leftrightarrow 2|f(\lambda)|=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0\Leftrightarrow \lambda^3-3\lambda+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=-2$

Γ3. Εχουμε ότι: $\alpha\cdot\eta\mu x+\beta\cdot\eta\mu 2x\le\gamma\cdot\eta\mu 3x,$ **(1)** $\forall x$ κοντά στο 0

- Αν x>0(κοντά στο 0) τότε και ημx>0 και η (1) γίνεται:

$\alpha\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}+2\beta\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\le 3\gamma\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}(\alpha\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}+2\beta\dfrac{\eta\mu 2x}{2x})\le\lim\limits_{x\to 0^+}(3\gamma\dfrac{\eta\mu 3x}{3x})\Rightarrow$

$\alpha\cdot 1+2\beta\cdot 1\le 3\gamma\cdot 1\Rightarrow\alpha+2\beta\le 3\gamma$ **(2)**

- Αν x<0(κοντά στο 0) τότε και ημx<0 και η (1) γίνεται:

$\alpha\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}+2\beta\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\ge 3\gamma\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}(\alpha\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}+2\beta\dfrac{\eta\mu 2x}{2x})\ge\lim\limits_{x\to 0^-}(3\gamma\dfrac{\eta\mu 3x}{3x})\Rightarrow\alpha+2\beta\ge 3\gamma$ **(3)**

από (2) και (3) είναι $\alpha+2\beta=3\gamma$

Γ4.

1.Είναι $f(x)=\sqrt{x^2+k}-x=\dfrac{(\sqrt{x^2+k}-x)(\sqrt{x^2+k}+x)}{\sqrt{x^2+k}+x}=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+k}+x}$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{\sqrt{x^2+k}+x}=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+k}+x)=+\infty$

2. α) Είναι : $f(x)=(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}+...\sqrt{x^2+100}-100x)=$
$=(\sqrt{x^2+1}-x)+(\sqrt{x^2+2}-x)+...+(\sqrt{x^2+100}-x)$ και σύμφωνα με το ερώτημα 1) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

β) Είναι : $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+1}+\sqrt{\ln^2 x+2}+...\sqrt{\ln^2 x+100}-\ln x^{100})=$
$=(\sqrt{\ln^2 x+1}+\sqrt{\ln^2 x+2}+...\sqrt{\ln^2 x+100}-100\ln x=$
$=(\sqrt{\ln^2 x+1}-\ln x)+(\sqrt{\ln^2 x+2}-\ln x)+...+(\sqrt{\ln^2 x+100}-\ln x)\overset{\ln x=y}{=\!=\!=}$
$=(\sqrt{y^2+1}-y)+(\sqrt{y^2+2}-y)+...+(\sqrt{y^2+100}-y)=g(y)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{y\to+\infty} y=+\infty$ οπότε και
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty} g(y)=0$, σύμφωνα με το α) ερώτημα.

<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

Δ1.
1.
Ισχύει η σχέση $x+|\eta\mu x|\le f(x)\le |x|+x$ **(1)**

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(x+|\eta\mu x|)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(|x|+x)=0$, απ' το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

2. Εχουμε:

$$\frac{x\cdot f(x)-\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{(x\cdot f(x)-\eta\mu 2x)\cdot(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)\cdot(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{(x\cdot f(x)-\eta\mu 2x)\cdot(\sqrt{x+4}+2)}{x}=$$

$$=\frac{x\cdot f(x)-\eta\mu 2x}{x}\cdot(\sqrt{x+4}+2)=(f(x)-2\frac{\eta\mu 2x}{2x})\cdot(\sqrt{x+4}+2) \text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x)-\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\left[(f(x)-2\frac{\eta\mu 2x}{2x})\cdot(\sqrt{x+4}+2)\right]=(0-2)\cdot 4=-8$$

3.

●Αν $x>0$ τότε και $\eta\mu x>0$ η (1) γράφεται

$$x+\eta\mu x\le f(x)\le x+x \overset{:\eta\mu x}{\Rightarrow}\frac{x}{\eta\mu x}+1\le\frac{f(x)}{\eta\mu x}\le\frac{2x}{\eta\mu x} \text{ και απ' το κριτήριο}$$

παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=2$

●Αν $x<0$ τότε και ημx<0 και η (1) γράφεται

$$x-\eta\mu x\ge f(x)\ge -x+x \overset{:\eta\mu x}{\Rightarrow}\frac{x}{\eta\mu x}-1\ge\frac{f(x)}{\eta\mu x}\ge 0 \text{ και απ' το κριτήριο}$$

παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=0$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

Δ2.

1. Από την ισότητα $f^3(x)+f(x)=3\eta\mu 4x \Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+2\right]=3\eta\mu 4x \Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{3\eta\mu 4x}{f^2(x)+2} \text{ άρα } |f(x)|=\frac{|3\eta\mu 4x|}{|f^2(x)+2|}=\frac{3|\eta\mu 4x|}{f^2(x)+2}\le 3|\eta\mu 4x| \Leftrightarrow$$

$$-3|\eta\mu 4x|\le f(x)\le 3|\eta\mu 4x| \overset{\kappa.\pi}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

2. Στο 1 ερώτημα είχαμε $f(x)=\frac{3\eta\mu 4x}{f^2(x)+2}$ άρα αν $x\ne 0$ είναι:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{3\eta\mu 4x}{x}\cdot\frac{1}{f^2(x)+2}\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=3\cdot 4\cdot\frac{\eta\mu 4x}{4x}\cdot\frac{1}{f^2(x)+2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=12\cdot 1\cdot\frac{1}{0+2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=6$$