ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

161

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις **13-9-2015**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω Α ένα υποσύνολο του R .Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α ; **(μον.4)**

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ; **(μον.4)**

Α3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄ **(μον.7)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. Η συνάρτηση $f(x)=2^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R **Σ Λ**
2. Η C_f συνάρτησης f τέμνει τον y΄y σε ένα σημείο **Σ Λ**
3. Οι λύσεις της ανίσωσης f(x)>g(x) δίνουν τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g **Σ Λ**
4. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ έχει C_f με άξονα συμμετρίας τον y΄y **Σ Λ**
5. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της είναι "1-1" **Σ Λ**
6. Αν στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f περιέχεται το μηδέν , η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα . **Σ Λ**
7. Αν το σύνολο τιμών συνάρτησης f είναι κλειστό διάστημα , η f έχει (ολικά) ακρότατα **Σ Λ**
8. Ισχύει fog=gof **Σ Λ**
9. Αν η f αντιστρέφεται τότε η C_f^{-1} τέμνει τον x΄x το πολύ σ ΄ένα σημείο . **Σ Λ**
10. Είναι $f(f^{-1}(x))=x$, για κάθε $x\in A_f$ **Σ Λ**

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και g(x)=2-x

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων **(μον.5)**

Β2. Να ορισθεί η συνάρτηση fog **(μον.7)**

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται να βρείτε την f^{-1}. **(μον.6)**

Β4. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της fofog **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le \lambda\ln\lambda \\ 2e^x-3, & x\ge 2\ln\lambda \end{cases}$

1. Να βρείτε την ακέραια τιμή του λ ώστε η f να είναι συνάρτηση. **(μον.5)**

2. Αν λ=2 εξετάστε αν η f αντιστρέφεται. **(μον.5)**

3. Στην περίπτωση που η f αντιστρέφεται , εξετάστε αν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινά σημεία. **(μον.5)**

Γ2. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} \ln x, & 0<x<1 \\ \sqrt{x-1}, & x\ge 1 \end{cases}$$ **(μον.10)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+2$.

Δ1.Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.3)**

Δ2.Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(4)$ **(μον.3)**

Δ3.Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=12$ και $f^{-1}(x)=-2$ **(μον.4)**

Δ4.Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες καθώς και με την ευθεία y=x. **(μον.5)**

Δ5.Να λύσετε την εξίσωση: $(2-\eta\mu^2x)^3=\eta\mu^3x+\eta\mu^2x+\eta\mu x-2$. **(μον.6)**

Δ6.Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)<3$. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία **Α2.** Θεωρία **Α3.** Θεωρία

Α4. 1Σ , 2Λ , 3Λ , 4Σ , 5Σ , 6Σ , 7Σ , 8Λ , 9Σ , 10Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για την $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ πρέπει $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ δηλ $A_f=[-1,+\infty)$

Η g(x)=2-x έχει A_g=R

Β2. Η fog ορίζεται για τα x για τα οποία ισχύει :

$$\left.\begin{matrix} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\in R \\ 2-x\geq -1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{matrix} x\in R \\ x\leq 3 \end{matrix}$$ δηλ $A_{fog}=(-\infty,3]$ και ο τύπος

της είναι $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{-x+3}-1$

Β3. Η εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=y+1 \overset{y\geq -1}{\Leftrightarrow}$

$x+1=(y+1)^2 \Leftrightarrow x+1=y^2+2y+1 \Leftrightarrow x=y^2+2y$, μοναδική λύση

$\forall y$ στο $f(A)=[-1,+\infty)$. Η f λοιπόν είναι «1-1» άρα αντιστρέφεται .

Η f^{-1} έχει π.ο το $f(A)=[-1,+\infty)$ και τύπο $f^{-1}(x)=x^2+2x$

Β4. Η g(x)=2-x είναι γνησίως φθίνουσα .

Για την f έχουμε: $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow$

$\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+1} \Rightarrow \sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα .

Είναι $fofog=fo(fog)$ και ορίζεται για τα

$$\left.\begin{matrix} x\in A_{fog} \\ (fog)(x)\in A_f \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\leq 3 \\ \sqrt{3-x}-1\geq -1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{matrix} x\leq 3 \\ \sqrt{3-x}\geq 0 \end{matrix}$$ δηλ $x\leq 3$.

Άρα $A_{fofog}=(-\infty,3]$ και $\forall x_1,x_2$ σ' αυτό με

$x_1<x_2 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x_1)>g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(g(x_1))>f(g(x_2)) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$

$f(f(g(x_1))>f(f(g(x_2)) \Rightarrow (fofog)(x_1)>(fofog)(x_2)$

Άρα η $fofog$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

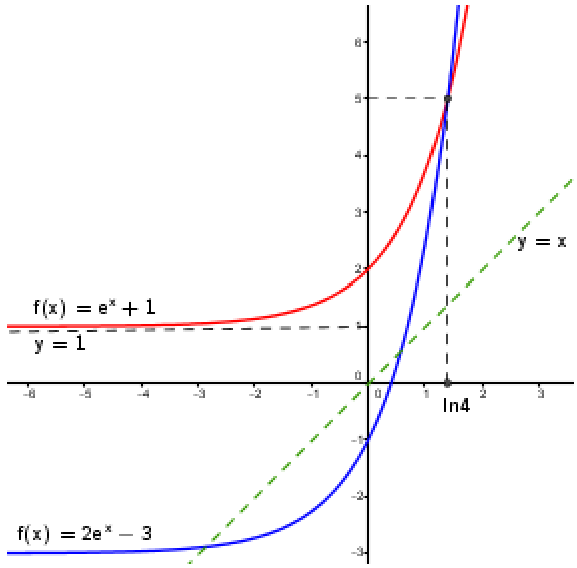
1. Για να είναι η $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le \lambda\ln\lambda \\ 2e^x-3, & x\ge 2\ln\lambda \end{cases}$ συνάρτηση πρέπει κατ' αρχάς να είναι $\lambda\ln\lambda\le 2\ln\lambda, \lambda>0 \Leftrightarrow \lambda\ln\lambda-2\ln\lambda\le 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)\ln\lambda\le 0 \Leftrightarrow$ ($\ln\lambda\le 0$ και $\lambda-2\ge 0$) ή ($\ln\lambda\ge 0$ και $\lambda-2\le 0$) $\Leftrightarrow$ ($\lambda\le 1$ και $\lambda\ge 2$, αδύνατο) ή ($\lambda\ge 1$ και $\lambda\le 2$) δηλ. $1\le\lambda\le 2$.

Επειδή λ ακέραιος έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν λ=1 τότε $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le 0, \text{με } f(0)=2 \\ 2e^x-3, & x\ge 0, \text{με } f(0)=-1 \end{cases}$ άρα η f δεν είναι συνάρτηση.
- Αν λ=2 τότε $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le \ln 4, \text{με } f(\ln 4)=5 \\ 2e^x-3, & x\ge \ln 4, \text{με } f(\ln 4)=5 \end{cases}$ άρα για λ=2 η f είναι συνάρτηση.

2. Για λ=2 οι δύο κλάδοι της συνάρτησης είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις και για το ln4 δίνουν την ίδια τιμή, f(ln4)=5. Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα αντιστρέφεται.

3. Επειδή $e^x+1>x$ στο $(-\infty,\ln 4]$ και $2e^x-3>x$ στο $[\ln 4,+\infty)$, η C_f βρίσκεται πάνω απ' την y=x.
Άρα η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω απ' την y=x, αφού οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την y=x.
Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ λοιπόν δεν έχουν κοινά σημεία.



Γ2. Είναι $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\in(0,1)=A_1\\ \sqrt{x-1}, & x\in[1+\infty)=A_2\end{cases}$

- Αν $x\in A_1$ η εξίσωση $f(x)=y\Leftrightarrow \ln x=y\Leftrightarrow x=e^y$
  Πρέπει $0<e^y<1\Leftrightarrow e^y<e^0\Leftrightarrow y<0$ δηλ $f(A_1)=(-\infty,0)$
  και η λύση μοναδική ως προς x, για κάθε y .
- Αν $x\in A_2$ η $f(x)=y\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=y\overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow} x-1=y^2\Leftrightarrow x=y^2+1$
  Πρέπει $y^2+1\ge 0$, ισχύει .Άρα $f(A_2)=[0,+\infty)$ και η λύση μοναδική ως προς x , για κάθε y .
  Η f είναι «1-1» κατά κλάδο και επειδή
  $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της .
  Αντιστρέφεται λοιπόν και έχει $f^{-1}(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x^2+1, & x\ge 0\end{cases}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Η $f(x)=x^3+x+2$ έχει $A=\mathbb{R}$ και αν $x_1,x_2\in A$ με

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3, x_1<x_2\overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\Rightarrow x_1^3+x_1+2<x_2^3+x_2+2\Rightarrow$
$f(x_1)<f(x_2)$.
Άρα η f είναι ↑ στο A.

Δ2.Επειδή η f είναι ↑ αντιστρέφεται. Η f έχει σύνολο τιμών το R άρα η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το R.
Είναι f(1)=4 άρα $f^{-1}(4)=1$.

Δ3.Είναι • $f(x)=12\Rightarrow f(x)=f(2)\overset{f\text{"1-1"}}{\Rightarrow} x=2$
• $f^{-1}(x)=-2\Rightarrow x=f(-2)\Rightarrow x=-8$

Δ4.● Αν $f^{-1}(x)=0 \Rightarrow x=f(0) \Rightarrow x=2$. Άρα η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον x΄x στο σημείο K(2,0).

● Αν x=0 τότε $f^{-1}(0)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha^3+\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=-1$, προφανής και λόγω της μονοτονίας, μοναδική ρίζα. Άρα $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον y΄y στο Λ(0,-1).

● Επειδή η f είναι γν. αύξουσα τα όποια κοινά σημεία βρίσκονται στη διχοτόμο x=y. Απ΄ την εξίσωση

$f(x)=x \Rightarrow x^3+x+2=x \Rightarrow x^3=-2$. Άρα $x=-\sqrt[3]{2}$.

Το κοινό σημείο λοιπόν είναι το $M(-\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{2})$

Δ5. Είναι:

$$(2-ημ^2x)^3=ημ^3x+ημ^2x+ημx-2 \Rightarrow (2-ημ^2x)^3+(2-ημ^2x)=ημ^3x+ημx$$

$$\Rightarrow (2-ημ^2x)^3+(2-ημ^2x)+2=ημ^3x+ημx+2 \Rightarrow f(2-ημ^2x)=f(ημx) \overset{f\text{"1-1"}}{\Rightarrow}$$

$2-ημ^2x=ημx \Rightarrow ημ^2x+ημx-2=0 \Rightarrow ημx=1$ ή $ημx=-2$,

απορρίπτεται, άρα $x=2κπ+\dfrac{π}{2}, κ\in Z$

Δ6. Είναι $f^{-1}(x)<3 \overset{f}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x))<f(3) \Rightarrow x<32$