ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

160
Υλη:Παράγωγοι **Γ΄ Λυκείου**
Ον/μο:……………….. **15-2-15**
Θετ-Τεχν.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι:
αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει ότι $f'(x) > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **(μον.7)**

Α2. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού και του ολικού μέγιστου μιας συνάρτησης f. **(μον.4)**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. **(μον.4)**

Α4. Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2\alpha-3$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\beta+1$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε 2α-β=4. Σ Λ

2. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2,$ τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και είναι ίσο με f(0). Σ Λ

3. Οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των $f(x)=-3x^2$, $g(x)=-3x^2+2$ και h(x)=$-3x^2-\sqrt{2}$ στα σημεία τομής τους με την ευθεία $x=x_0$ είναι παράλληλες. Σ Λ

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν είναι 1-1, τότε η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο. Σ Λ

5. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει το Θεώρημα Rolle στο [α,β] τότε ισχύει και το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. στο [α,β]. Σ Λ

6.Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής στο R με $f'(x)=0$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f(x)=\begin{cases} c_1, x<0 \\ c_2, x>0 \end{cases}$ με $c_1\neq c_2$ Σ Λ

7.Εστω συνάρτηση $f:R\to R$.Αν $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in R$ και η f' είναι συνεχής στο R , τότε η f είναι γνησίως μονότονη. Σ Λ

8.Εστω η συνεχής συνάρτηση f η οποία στρέφει τα κοίλα άνω στο (α,β).Καθώς το x κινείται από το α προς το β, η κλίση της C_f αυξάνεται. Σ Λ

9.Η κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f δεν τέμνει την C_f. Σ Λ

10.Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ Σ Λ

(μον.10)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Εστω η συνάρτηση f συνεχής στο R, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$, και $ημ^2x-x^3\leq xf(x)\leq ημ^2x+x^3$

1.Να αποδείξετε ότι f(0)=0 **(μον.3)**

2.Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος των γωνιών του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημόριου εφάπτεται στην C_f στο σημείο Ο(0,0). **(μον.6)**

3.Θεωρούμε τη συνάρτηση g για την οποία είναι $g(x)=f(x)-x+1$ για κάθε $x\in R$.Να αποδείξετε ότι η Cg και η εφαπτομένη της C_f στο Ο(0,0) έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$. **(μον.6)**

Β2. Εστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

1. Να αποδείξετε ότι:
$f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1),\ \forall x\geq 1.$ **(μον.6)**

2. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in R$ να αποδείξετε οτι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0.$ **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Γ

Εστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f^3(x)+2f(x)=x,\ \forall x\in R$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R. **(μον.5)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R. **(μον.3)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η $f''\ \forall x\in R$. **(μον.3)**

Γ4. Να μελετήσετε την f ως προς την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής. **(μον.5)**

Γ5. Να αποδείξετε ότι $f(-2016)$ και $f(2016)$ ετερόσημοι. **(μον.3)**

Γ6. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} **.** **(μον.3)**

Γ7. Αν $g(x)=\dfrac{f^{-1}(x)}{x^2}$ να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. **(μον.3)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εστω η συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει:
$f(5)-f(3) \leq 2f'(x) \leq f'(1)+f'(2) \quad \forall x \in R$
Να αποδείξετε ότι:

1. $f'(1)=f'(2)$ **(μον.4)**

2. Η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο **(μον.4)**

3. Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο **(μον.4)**

4. Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει 4 τουλάχιστον ρζες. **(μον.4)**

Δ2. Η συνάρτηση $f:R \to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και $f''(x)=f(x) \ \forall x \in R$.

1. Να αποδείξετε ότι : $f(x)+f'(x)=c \cdot x, \ c \in R$ **(μον.3)**

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν κ, λ $\in R$ ώστε
$f(x)=\kappa \cdot e^{x}+\lambda \cdot e^{-x}$ **(μον.3)**

3. Αν η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση, να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε δύο θέσεις $x_1, \ x_2$ με $x_1 \neq x_2$. **(μον.3)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία, σχολικό βιβλίο.

Α4. 1Σ , 2Σ, 3Σ, 4Σ, 5Σ, 6Λ, 7Σ, 8Σ, 9Λ, 10Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εχουμε ότι $ημ^2x - x^3 \le xf(x) \le ημ^2x + x^3$ **(1)**

1.

Αν x>0(κοντά στο 0)$\overset{(1)}{\underset{(:x)}{\Rightarrow}} \dfrac{ημ^2x}{x} - \dfrac{x^3}{x} \le f(x) \le \dfrac{ημ^2x}{x} + \dfrac{x^3}{x} \Rightarrow$

$\dfrac{ημx}{x} \cdot ημx - x^2 \le f(x) \le \dfrac{ημx}{x} \cdot ημx + x^2$ και απ' το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Ομοια αν x<0 βρίσκουμε $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Επειδή η f είναι συνεχής θα είναι και f(0)=0

2.

Η (1) $\overset{(:x^2)}{\Rightarrow} \dfrac{ημ^2x}{x^2} - x \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{ημ^2x}{x^2} + x$ και σύμφωνα

με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Ο(0,0) έχει εξίσωση

ε: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow$ $ε: y = x$

3.

Θέτουμε $\dfrac{f(x)}{x-2} = φ(x)$ οπότε

f(x)=(x-2)$\cdot$φ(x), $x \ne 2$ και $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x-2) \cdot φ(x) = 0 \cdot 1 = 0$

Επειδή η f είναι συνεχής θα είναι και f(2)=0

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-x=f(x)-2x+1$

●Είναι συνεχής στο [0,2] ως πράξεις συνεχών

●h(0)=1, h(2)=f(2)-3=0-3=-3

και σύμφωνα με το θεώρημα Bolazno υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (0,2)$ ώστε $h(x_0)=0$ που σημαίνει ότι η C_g και η εφαπτομένη της C_f στο O έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμένη $x_o \in (0,2)$

B2.

1.

●Η f είναι συνεχής στα [x-1,x] και [x,x+1] ως παραγωγίσιμη

●Η f είναι παραγωγίσιμη στα (x-1,x) και (x,x+1)

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (x-1,x),\ \xi_2 \in (x,x+1)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=f(x)-f(x-1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x)$$

Είναι $\xi_1 < x < \xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow}$

$f'(\xi_1) > f'(x) > f'(\xi_2) \Rightarrow f(x)-f(x-1) > f'(x) > f(x+1)-f(x)$ δηλ.

$f(x+1)-f(x) < f'(x) < f(x)-f(x-1)$ **(1)**

2.

Εχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) \overset{x+1=y}{=} \lim_{y\to+\infty} f(y)=\lambda \in R \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x-1) \overset{x+1=y}{=} \lim_{y\to+\infty} f(y)=\lambda \in R .$$

Απ’ την (1) και σύμφωνα με το κ.π. είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $f^3(x)+2f(x)=x,\ \forall x\in R$ οπότε $f^3(x_o)+2f(x_o)=x_o$ και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε: $f^3(x)-f^3(x_o)+2[f(x)-f(x_o)]=x-x_o$ άρα

$[f(x)-f(x_o)]\cdot[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_o)+f^2(x_o)]+2[f(x)-f(x_o)]=x-x_o$ και

$[f(x)-f(x_o)]\cdot[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_o)+f^2(x_o)+2]=x-x_o$

και αφού $f^2(x)+f(x)\cdot f(x_o)+f^2(x_o)>0$ θα είναι:

$$f(x)-f(x_o)=\frac{x-x_o}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_o)+f^2(x_o)+2}\quad (1)$$ και άρα

$$|f(x)-f(x_o)|=\frac{|x-x_o|}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_o)+f^2(x_o)+2}\Rightarrow |f(x)-f(x_o)|\le|x-x_o|\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_o}|f(x)-f(x_o)|\le\lim_{x\to x_o}|x-x_o|=0\Rightarrow\lim_{x\to x_o}|f(x)-f(x_o)|=0$$ οπότε

$\lim_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$ και η f είναι συνεχής.

Γ2. Απ' την (1) έχουμε: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_o)+f^2(x_o)+2}$ και

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_o)+f^2(x_o)+2}=\frac{1}{3f^2(x_o)+2}\in R$$

Αρα η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{1}{f^2(x)+2}>0$

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε $f''(x)=\dfrac{-6f(x)\cdot f'(x)}{[3f^2(x)+2]^2}$.

Γ4. Απ' την $f^3(x)+2f(x)=x$ για x=0 έχουμε $f^3(0)+2f(0)=0\Rightarrow$

$f(0)(f^2(0)+2)=0\Rightarrow f(0)=0$

Αν $f''(x)\ge0\Leftrightarrow\dfrac{-6f(x)\cdot f'(x)}{[3f^2(x)+2]^2}\ge0\overset{f'>0}{\Leftrightarrow}f(x)\le0=f(0)\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}x\le0$ και

όμοια αν $f''(x)\le0\ \Rightarrow x\ge0$.

Η f λοιπόν είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Εχει σημείο καμπής το (0,0).

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f '	+	+
f ''	+	−
f	$\nearrow\cup$	$\cap\searrow$

Γ5.Είναι: $-2016<0<2016 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(-2016)<f(0)<f(2016) \Rightarrow$
$f(-2016)<0<f(2016)$ άρα οι αριθμοί $f(-2016)$ και $f(2016)$
είναι ετερόσημοι.

Γ6.Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται.
Στη σχέση $f^3(x)+2f(x)=x, \forall x \in R$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και
έχουμε: $(f(f^{-1}(x))^3+2f(f^{-1}(x))=f^{-1}(x) \Rightarrow x^3+2x=f^{-1}(x)$

Γ7.Είναι:
$$g(x)=\frac{x^3+2x}{x^2}=x+\frac{2}{x} \Leftrightarrow g(x)-x=\frac{2}{x} \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$
Αρα η ασύμπτωτη της g στο $+\infty$ είναι η y=x.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

1.Η σχέση $f(5)-f(3)\le 2f'(x)\le f'(1)+f'(2) \quad \forall x\in R$, για
$x=1$ και x=2 δίνει: $f'(1)\le f'(2)$ και $f'(2)\le f'(1)$ οπότε $f'(1)=f'(2)$

2.Απ' την (1) έχουμε:
$2f'(x)\le f'(1)+f'(1)=f'(2)+f'(2)\Rightarrow f'(x)\le f'(1)=f'(2)$ $,\forall x\in R$
άρα η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f'(1)=f'(2)$,στις θέσεις 1 και 2.

3.Απ' την (1) έχουμε:
$$f'(x)\ge\frac{f(5)-f(3)}{2}\underset{\exists\xi_1\in(3,5)}{\overset{\Theta.M.T.}{=\!=\!=\!=}}f'(\xi_1),\forall x\in R$$
Αφού $f'(x)\ge f'(\xi_1),\xi_1\in R,\forall x\in R$ η f' παρουσιάζει ολικό
ελάχιστο το $f'(\xi_1)$ στο ξ_1.

4.Λόγω του θ. Fermat είναι $f''(1)=f''(2)=f''(\xi_1)=0$
Ακόμα αφού $f'(1)=f'(2)$ λόγω του θ.Rolle για την f' υπάρχει
$\xi\in(1,2)$ με $f''(\xi)=0$
Η f'' λοιπόν έχει τουλάχιστον 4 ρίζες.

Δ2.

1. Εχουμε: $f''(x)=f(x)\Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f(x)+f'(x)\Leftrightarrow$

$(f'(x)+f(x))'=f(x)+f'(x)\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=c\cdot e^{x}$

2. Απ' την $f'(x)+f(x)=c\cdot e^{x}$

$\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{x}+f(x)\cdot e^{x}=c\cdot e^{2x}\Leftrightarrow (f(x)\cdot e^{x})'=(\frac{c}{2}e^{2x})'\Leftrightarrow$

$f(x)\cdot e^{x}==\frac{c}{2}e^{2x}+c'$ και αν $\frac{c}{2}=\kappa$ και $c'=\lambda$ τότε $f(x)=\kappa\cdot e^{x}+\lambda\cdot e^{-x}$

3. Εστω ότι η f παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1 και x_2.

Σύμφωνα με το θ.Fermat θα είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.

Απ' το (2) είναι $f(x)=\kappa\cdot e^{x}+\lambda\cdot e^{-x}\Leftrightarrow f'(x)=\kappa\cdot e^{x}-\lambda\cdot e^{-x}$ οπότε

$$\left.\begin{array}{l}\kappa\cdot e^{x_1}-\lambda\cdot e^{-x_1}=0\\ \kappa\cdot e^{x_2}-\lambda\cdot e^{-x_2}=0\end{array}\right|\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\kappa\cdot e^{2x_1}=\lambda\\ \kappa\cdot e^{2x_2}=\lambda\end{array}\right|\Rightarrow \kappa\cdot e^{2x_1}=\kappa\cdot e^{2x_2}\Rightarrow$$

$\kappa=0$ άρα και $\lambda=0$.Ετσι $f(x)=0\ \forall x\in R$ δηλ. σταθερή, άτοπο.

Αρα δεν μπορεί η f να παρουσιάζει ακρότατα σε δύο θέσεις.