ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

159

Υλη:Ορια-Συνέχεια **Γ΄ Λυκείου**

Ον/μο:……………….. **30-11-14**

Θετ-Τεχν.

ΘΕΜΑ Α

Α1.Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία **(μον.4)**

Α2.Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα [α, β]; **(μον.3)**

Α3.Εστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].Να αποδείξετε ότι:
Αν
●η f είναι συνεχής στο [α, β]
● $f(\alpha) \neq f(\beta)$
τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_o) = \eta$ **(μον.8)**

Α4. Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x \cdot \left(\frac{1}{x^2+x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x} = 0 \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x} = 0$ Σ Λ

2.Αν $f(x) > 1\ \forall x \in R$, και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > 1$ Σ Λ

3.Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 \cdot f(x)) = 0$ Σ Λ

4.Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f^2(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ Σ Λ

5. Αν f συνεχής R και για $x \neq 4$ ισχύει f(x)=$\frac{x^2-7x+12}{x-4}$,
τότε f(4)=1 Σ Λ

(μον.5)

Α5. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση:

1. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^3-x^2-1\right|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

α) $+\infty$ **β)** $-\infty$ **γ)** 1 **δ)** -1 **ε)** 0

2. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

α) $x_o=0$ **β)** $x_o=2$ **γ)** $x_o=-1$ **δ)** $x_o=1$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}+1$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

α) η g είναι συνεχής στο 2

β) η f είναι συνεχής στο 1

γ) η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

4. Ποιά από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένα;

α) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(x^3+x+1\right]$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(x^3+x-1\right]$

5. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα Δ=[0,3], με f(0)=2, f(1)=1 και f(3)=-1

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

α) Υπάρχει $x_o\in(0,3)$ τέτοιος ώστε $f(x_o)=0$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=-1$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

δ) $\left[-1,2\right]\subseteq f(\Delta)$

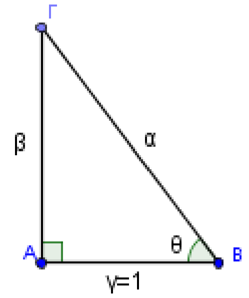
ε) Η μέγιστη τιμή της f στο [0,3] είναι το 2 και η ελάχιστη το -1

(μον.5)

ΘΕΜΑ Β

Β1.Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με γ=1.Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$ **β)** $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)$ **γ)** $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$



(μον.12)

Β2.Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο R η οποία για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί τη σχέση $x+|\eta\mu x|\le f(x)\le|x|+x$

α)Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(x)\text{-}\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}\text{-}2}$. **(μον.8)**

β)Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ δεν έχει όριο στο $x_0=0$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Να υπολογιστούν τα α, β $\in R$ ώστε να είναι συνεχής στο $x_0=2$ η συνάρτηση f με: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+\beta\sqrt{x}+3}{x-2}, & x\ge 0 \text{ και } x\ne 2\\ 4, & x=2\end{cases}$

(μον.7)

Γ2.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=5\text{-}4x\ \ \forall x\in R$ και f(1)=0 . Ν.δ.ο

α) Η f αντιστρέφεται **(μον.5)**

β) Η εξίσωση $(fof)(x)\text{-}f(5\text{-}10x^3)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1) **(μον.7)**

Γ3.Αν η f είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

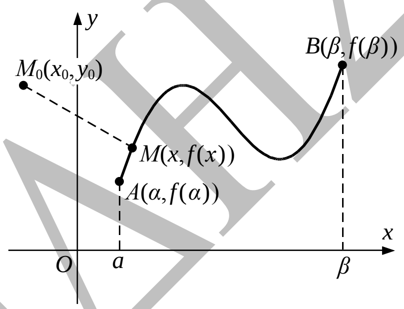
Δ1. Εστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,3) \to R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,3)$.

Αν $f(1)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-2$ να βρείτε:

α) Το σύνολο τιμών της f.

β) Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, στο $(0,3)$. **(μον.6)**

Δ2. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο [α, β] και το $M_o(x_o, y_o)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου.



α) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x)=(M_o M)$ του σημείου $M_o(x_o, y_o)$ από το σημείο $M(x, f(x))$ της C_f για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. **(μον.5)**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο [α, β] και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_o λιγότερο από ότι απέχουν τα άλλα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_o περισσότερο από ότι απέχουν τα άλλα σημεία της. **(μον.3)**

Δ3. Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο R για την οποία ισχύει: $f(1)+f(2)=f(3)+f(4)$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται. **(μον.7)**

Δ4. . Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$.
Αν $\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\gamma<0$ να δείξετε ότι $\beta^2>4\alpha\gamma$. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία, σχολικό βιβλίο.

Α4. 1Λ, 2Λ, 3Σ, 4Σ, 5Σ

Α5. 1ε, 2γ, 3γ, 4α,γ,ε 5ε

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta}{1} \Leftrightarrow \beta = \varepsilon\varphi\theta.$$

α) $$\alpha - \beta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{(1-\eta\mu\theta)\cdot(1+\eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\eta\mu\theta)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\eta\mu\theta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} \text{ οπότε}$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{1+\eta\mu\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

β) $$\alpha^2-\beta^2 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \varepsilon\varphi^2\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{1-\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 1$$

άρα $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2) = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(1) = 1$

γ) $$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\theta}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}} = \varepsilon\varphi\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta$$

άρα $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\eta\mu\theta) = \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$

B2.

α) Ισχύει η σχέση $x+|\eta\mu x| \le f(x) \le |x|+x$ **(1)**

● Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(x+|\eta\mu x|)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(|x|+x)=0$, απ' το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

● Εχουμε:

$$\frac{x\cdot f(x)-\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{(x\cdot f(x)-\eta\mu 2x)\cdot(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)\cdot(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{(x\cdot f(x)-\eta\mu 2x)\cdot(\sqrt{x+4}+2)}{x}=$$

$$=\frac{x\cdot f(x)-\eta\mu 2x}{x}\cdot(\sqrt{x+4}+2)=(f(x)-2\frac{\eta\mu 2x}{2x})\cdot(\sqrt{x+4}+2) \text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x)-\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\ (f(x)-2\frac{\eta\mu 2x}{2x})\cdot(\sqrt{x+4}+2)=(0-2)\cdot 4=-8$$

β)

● Αν $x>0$ τότε και $\eta\mu x>0$ η (1) γράφεται

$x+\eta\mu x \le f(x) \le x+x \overset{:\eta\mu x}{\Rightarrow} \frac{x}{\eta\mu x}+1 \le \frac{f(x)}{\eta\mu x} \le \frac{2x}{\eta\mu x}$ και απ' το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=2$

● Αν $x<0$ τότε και $\eta\mu x<0$ και η (1) γράφεται

$x-\eta\mu x \ge f(x) \ge -x+x \overset{:\eta\mu x}{\Rightarrow} \frac{x}{\eta\mu x}-1 \ge \frac{f(x)}{\eta\mu x} \ge 0$ και απ' το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=0$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο 2 πρέπει $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$

Εχουμε: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\alpha x^2+\beta\sqrt{x}+3}{x-2} = \dfrac{4\alpha+\beta\sqrt{2}+3}{0}$ και επειδή το όριο είναι πραγματικός αριθμός πρέπει κατ' αρχάς να είναι $4\alpha+\beta\sqrt{2}+3=0$ (1)

Η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta\sqrt{x}-4\alpha-\beta\sqrt{2}}{x-2}=\frac{\alpha(x^2-4)+\beta(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}=\frac{\alpha(x^2-4)}{x-2}+\frac{\beta(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}=$$

$$=\alpha(x+2)+\frac{\beta(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\alpha(x+2)+\frac{\beta}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$ άρα

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left[\alpha(x+2)+\frac{\beta}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right]=4\alpha+\frac{\beta}{2\sqrt{2}}=4\alpha+\frac{\beta\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

Πρέπει λοιπόν να είναι:

$4\alpha+\dfrac{\beta\sqrt{2}}{4}=4 \Leftrightarrow 16\alpha+\beta\sqrt{2}=16 \Leftrightarrow \beta\sqrt{2}=16-16\alpha$ και η (1) γίνεται:

4α+16-16 α=4 άρα α=1 και από (1) είναι $\beta=-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

Γ2.

α)Εστω

$x_1, x_2 \in R$ και $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)} \Rightarrow e^{f(x_1)}+f(x_1)=e^{f(x_2)}+f(x_2)$ $\Rightarrow 5-4x_1=5-4x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ οπότε η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

β)Η εξίσωση

$(fof)(x)-f(5-10x^3)=0$

$$\Leftrightarrow f(f(x))-f(5-10x^3)=0 \Leftrightarrow f(f(x))=f(5-10x^3) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=5-10x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)+10x^3-5=0 \quad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+10x^3-5$ που ορίζεται στο R και είναι συνεχής σ' αυτό, άρα και στο [0,1].Επίσης:

$g(1) = f(1) + 10 - 5 = 0 + 5 = 5 > 0.$

Η δοθείσα σχέση για x=0 γίνεται $f(0) + e^{f(0)} = 5 \Leftrightarrow f(0) < 5$

Εχουμε λοιπόν ότι $g(0) = f(0) - 5 < 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της g άρα και της (1) στο (0,1) άρα και της ισοδύναμής της αρχικής εξίσωσης.

Γ3.

Εστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ ,για παράδειγμα δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε, αν α<β<γ θα είναι για παράδειγμα f(α)<f(γ)<f(β). (Όχι πάντως η διάταξη f(α)<f(β)<f(γ)).

Το f(γ) είναι μια ενδιάμεση τιμή των f(α) και f(β) οπότε θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε f(ξ)=f(γ) που σημαίνει πως η f δεν είναι 1-1.Ατοπο.

Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Ομοια εργαζόμαστε και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Ομοια εργαζόμαστε αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

α)Αφού η f είναι συνεχής , γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,1] και γνησίως φθίνουσα στο[1,3) θα είναι:

$$f((0,1]) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)] = (-1,2] \text{ και } f([1,3)) = (\lim_{x\to 3^-} f(x), f(1)] = (-2,2]$$

Το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = (-1,2] \cup (-2,2] = (-2,2]$

β)Το μηδέν περιέχεται στα διαστήματα (-1,2] και (-2,2] ,η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1], γνησίως φθίνουσα στο[1,3) άρα έχει μία ρίζα στο (0,1] και μία στο [1,3).

Δ2.

α) Σύμφωνα με τον τύπο της απόστασης δύο σημείων είναι:

$$d(x) = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = \sqrt{(x - x_o)^2 + (f(x) - y_o)^2}, \ x \in [\alpha, \beta]$$

β)Η συνάρτηση είναι συνεχής στο [α, β] ως ρίζα αθροίσματος συνεχών συναρτήσεων. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στις θέσεις x_ε και x_μ του [α,β] αντίστοιχα.

Δ3.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα [1,2] και [3,4] άρα σε καθένα απ' αυτά παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
Εστω m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [1,2].
Τότε για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει $m \le f(x) \le M$ οπότε και

$$\left.\begin{array}{l} m \le f(1) \le M \\ m \le f(2) \le M \end{array}\right| \Rightarrow 2m \le f(1)+f(2) \le 2M \Rightarrow m \le \frac{f(1)+f(2)}{2} \le M$$

Υπάρχει λοιπόν $\xi_1 \in [1,2]$ ώστε $f(\xi_1) = \dfrac{f(1)+f(2)}{2}$

Ομοια αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi_2 \in [3,4]$ ώστε $f(\xi_2) = \dfrac{f(3)+f(4)}{2}$

Αφού

$$f\left(1\right)+f\left(2\right)=f\left(1\right)+f\left(2\right) \Rightarrow \frac{f\left(1\right)+f\left(2\right)}{2}=\frac{f\left(3\right)+f\left(4\right)}{2} \Rightarrow f(\xi_1)=f(\xi_2)$$

Εχουμε λοιπόν $\xi_1 \ne \xi_2$ και $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ άρα η f δεν είναι 1-1 επομένως δεν αντιστρέφεται.

Δ4.
Εχουμε: $\gamma^2 + \beta\gamma + \alpha\gamma < 0 \Leftrightarrow \gamma(\gamma+\beta+\alpha) < 0 \Leftrightarrow f(0)\cdot f(1) < 0$
Επειδή η f είναι και συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f στο (0,1).Η f όμως είναι τριώνυμο άρα θα έχει δύο ρίζες. Αυτό σημαίνει ότι θα έχει διακρίνουσα, $\Delta \ge 0$.
Θα αποκλείσουμε το =.

Εστω λοιπόν ότι Δ=0 δηλ. $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \gamma = \dfrac{\beta^2}{4\alpha}$

Η σχέση $\gamma^2 + \beta\gamma + \alpha\gamma < 0$ γράφεται

$$\gamma(\gamma+\beta+\alpha) < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4\alpha}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}+\beta+\alpha\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4\alpha}\cdot\frac{\beta^2+4\alpha\beta+4\alpha^2}{4\alpha} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2\cdot(\beta+2\alpha)^2}{4\alpha^2} < 0, \text{ άτοπο.}$$

Είναι τελικά Δ>0 δηλ. $\beta^2 > 4\alpha\gamma$