ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

155

Υλη: Ολοκληρώματα **Γ΄ Λυκείου**

Ον/μο:……………….. **16-03-14**

Θετ-Τεχν.

<u>ΘΕΜΑ 1^0</u>

Α.1. Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης μιας συνάρτησης f . **(μον.3)**

Α.2. Δώστε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος . **(μον.4)**

Α.3. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x\in\Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ. (Να δοθεί εποπτική ερμηνεία) . **(μον.6)**

Α.4. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta)-G(\alpha)$ **(μον.7)**

Α5. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. Αν F , G είναι παράγουσες της συνάρτησης f στο διάστημα Δ , τότε οι F , G είναι ίσες . **Σ Λ**

2. Η συνάρτηση $F(x)=x\ln x-x$ είναι μια παράγουσα της $f(x)=\ln x$, με x>0 . **Σ Λ**

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$ **,** τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ **.** **Σ Λ**

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και f(β)=0 , τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx<0$ **Σ Λ**

5. Αν $g(t)=\int_{1}^{t} t\cdot f(x)dx$, τότε $g'(t)=t\cdot f(t)$. **Σ Λ**

(μον.5)

ΘΕΜΑ 2^0

Α. Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\left[\alpha,\beta\right]$

Α1. Να αποδείξετε ότι , αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in\left[\alpha,\beta\right]$,

τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$ **(μον.4)**

Α2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (M) τιμή στο $\left[\alpha,\beta\right]$ **(μον.2)**

Α3. Να αποδείξετε ότι $m\left(\beta-\alpha\right)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$ **(μον.4)**

Α.4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{3+t^2}dt$ **(μον.6)**

Β. Αν $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\frac{1}{8}$, να υπολογίσετε τον φυσικό αριθμό ν. **(μον.3)**

Γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\,dx$ **(μον.6)**

ΘΕΜΑ 3^0

Α. Έστω $I_\nu=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^\nu x dx$.

Α.1. Να αποδείξετε ότι $I_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}\cdot I_{\nu-2}$ ($\nu\ge 3$ φυσικός) **(μον.5)**

Α.2. Να υπολογίσετε το I_7 . **(μον.4)**

Β. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο R και η συνάρτηση

$$\Phi(x)=\int_0^x t\left(\int_1^{x^2}e^x f(t)dt\right)dt$$

Β.1. Να αποδείξετε ότι $\Phi(x)=\frac{x^2e^x}{2}\int_1^{x^2}f(t)dt$ **(μον.6)**

Β.2. Αν $f(x)>0$ στο R και $\Phi(2)=6e^2$ να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον x΄x και τις ευθείες x=1 και x=4 **(μον.4)**

Γ. Αν η f είναι συνεχής στο R και να αποδείξετε ότι

$\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$ **(μον.6)**

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι συνεχής και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=f(x)+i,\quad w=x+i\int_1^x f(t)dt,\quad x\in R$ για τους οποίους ισχύει η σχέση $|\bar{z}-w|>|z+\bar{w}|,\quad \forall x\in R$. Να δειχθεί ότι :

Α1. $Re(zw)<0$. **(μον.5)**

Α2. $\int_1^x f(t)dt>xf(x),\quad \forall x\in R$. **(μον.5)**

Α3. η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt=(1-x)f(1-x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο$(0,1)$. **(μον.5)**

Α4. η συνάρτηση $F:(0,+\infty)\to R$ με τύπο $F(x)=\int_2^x (\ln t)f(t)dt-\int_1^x (\ln x)f(t)dt,\quad \forall x>0$ είναι κυρτή. **(μον.5)**

Α5.Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in[1,4]$ ώστε $\int_{x_0}^2 f(x)dx+2\int_{x_0}^3 f(x)dx=0$. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0

Α.1 Θεωρία, Α.2 Θεωρία , Α.3 Θεωρία , Α4 Θεωρία
Α5. 1Λ , 2Σ , 3Λ , 4Σ , 5Λ

ΘΕΜΑ 2^0

Α.

Α1. Αφού $f(x)\le g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)\le 0$ άρα $\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx \le 0 \Leftrightarrow$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx \le 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Α.2. Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, σύμφωνα με το Θεώρημα Μ.Ε.Τ έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (Μ) τιμή δηλ. υπάρχουν x_ε και x_μ στο $[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_\varepsilon)=m$ και $f(x_\mu)=M$.

Α.3. Έχουμε : $m\le f(x)\le M \Rightarrow \int_\alpha^\beta m dx \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta M dx \Rightarrow$

$$m(\beta-\alpha)\le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M(\beta-\alpha)$$

Α.4. Η $f(t)=\dfrac{1}{3+t^2}$ έχει $A_f = R$ και

$$f'(t) = -\frac{\left(3+t^2\right)'}{\left(3+t^2\right)^2} = -\frac{2t}{\left(3+t^2\right)^2} < 0 \quad \forall t>0$$ οπότε είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Έχουμε: $x\le t\le x+1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$

$$f(x)\ge f(t)\ge f(x+1) \Rightarrow \int_x^{x+1} f(x)dt \ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge \int_x^{x+1} f(x+1)dt \Rightarrow$$

$$f(x+1)(x+1-1)\le \int_x^{x+1} f(t)dt \le f(x)\cdot(x+1-x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3+\left(x+1\right)^2} \le \int_x^{x+1} \frac{1}{3+t^2}dt \le \frac{1}{3+x^2} \; .$$

Όμως : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3+(x+1)^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3+x^2}=0$ και από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{1}{3+t^2}dt=0$.

Β. Έχουμε : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{\nu}x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\dfrac{1}{8}$ άρα $\left[\dfrac{\eta\mu^{\nu+1}x}{\nu+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{8}$ δηλ .

$$\frac{\eta\mu^{\nu+1}\frac{\pi}{2}}{\nu+1}-\frac{\eta\mu^{\nu+1}0}{\nu+1}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{\nu+1}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\nu+1=8\Leftrightarrow\nu=7$$

Γ. Είναι: $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx=$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}dx=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}\cdot dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|dx \quad \textbf{(1)}$$

Στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, όπως εύκολα διαπιστώνουμε από τον τριγωνομετρικό κύκλο , είναι $\sigma\upsilon\nu x\geq\eta\mu x$ άρα $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\leq 0$ και η (1) γράφεται :

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)dx=[\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right)-\left(\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \quad \text{δηλ } I=\sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 3^0

Α .

Α.1. Έχουμε : $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu-1} x \cdot \eta\mu x \cdot dx =$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu-1} x (\sigma\upsilon\nu x)' dx =$$

$$= -\left[\eta\mu^{\nu-1} x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\nu-1)\cdot \eta\mu^{\nu-2} x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$$

$$= 0 + (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu-2} x \cdot (1-\eta\mu^2 x) dx =$$

$$= (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu-2} x dx - (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^\nu x dx$$

άρα $I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2} - (\nu-1)I_\nu \Leftrightarrow I_\nu + (\nu-1)I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2}$

δηλ. $\nu I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2} \Leftrightarrow \boxed{I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 3}$ **(1)**

Α.2. Από την (1) έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} I_7 = \frac{6}{7} I_5 \\ I_5 = \frac{4}{5} I_3 \\ I_3 = \frac{2}{3} I_1 \end{array}\right| \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} I_7 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 \Rightarrow$$

$$I_7 = \frac{16}{35} I_1 = \frac{16}{35}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \frac{16}{35}\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = = \frac{16}{35}\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu 0\right)$$

δηλ $\boxed{I_7 = \frac{16}{35}}$

Β.

Β1. Έχουμε : $\Phi(x)=\int_0^x t\left(\int_1^{x^2} e^x f(t)dt\right)dt=$

$$=\int_1^{x^2} e^x f(t)dt\cdot\int_0^x tdt=e^x\int_1^{x^2} f(t)dt\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=$$

$$=e^x\cdot\frac{x^2-0^2}{2}\cdot\int_1^{x^2} f(t)dt \quad \text{άρα } \Phi(x)=\frac{x^2e^x}{2}\int_1^{x^2} f(t)dt \quad \textbf{(1)}$$

Β2. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_1^4 f(t)dt$ **(2)**

Για x=2 (1) γίνεται : $\Phi(2)=\frac{4e^2}{2}\int_1^4 f(t)dt$ άρα

$6e^2=2e^2\cdot E \Leftrightarrow E=3$

Γ. Έστω $G(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du$ και $F(x)=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$

Έχουμε :

- $G(x)=\int_0^x xf(u)du-\int_0^x uf(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$

  οπότε $G'(x)=(x)'\cdot\int_0^x f(u)du+x\cdot\left(\int_0^x f(u)du\right)'-\left(\int_0^x uf(u)du\right)'=$

  $=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)$ άρα $G'(x)=\int_0^x f(u)du$ **(1)**

- $F'(x)=\left(\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right)' \Rightarrow F'(x)=\int_0^x f(t)dt$ **(2)**

  Από (1) και (2) $\Rightarrow G'(x)=F'(x)\Leftrightarrow G(x)=F(x)+c$ **(3)**

  Είναι $G(0)=0$, F(0)=0 και από την (3) $\Rightarrow$

  $G(0)=F(0)+c$ άρα c=0 και επομένως $G(x)=F(x)$

ΘΕΜΑ 4^0

Α1. Έχουμε : $\left|\bar{z}-w\right|>\left|z+\bar{w}\right|\Leftrightarrow\left|\bar{z}-w\right|^2>\left|z+\bar{w}\right|^2\Leftrightarrow$

$\left(\bar{z}-w\right)\left(z-\bar{w}\right)>\left(z+\bar{w}\right)\left(\bar{z}+w\right)\Leftrightarrow$

$\bar{z}z-\underbrace{\bar{z}\bar{w}-wz}_{\in\mathbb{R}}+w\bar{w}>z\bar{z}+\underbrace{zw+\bar{w}\bar{z}}+\bar{w}w\Leftrightarrow$

$2\left(zw+\overline{zw}\right)<0\Leftrightarrow zw+\overline{zw}<0\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(zw)<0\Leftrightarrow$

$\operatorname{Re}\left(zw\right)<0$ (1)

Α2. Είναι $zw=\left(f(x)+i\right)\cdot\left(x+i\int_1^x f(t)dt\right)=$

$=xf(x)+f(x)\cdot\int_1^x f(t)dt\cdot i+xi-\int_1^x f(t)dt=$

$=\left(xf(x)-\int_1^x f(t)dt\right)+\left(f(x)\cdot\int_1^x f(t)dt+x\right)i$ και λόγω της (1) είναι

$xf(x)-\int_1^x f(t)dt<0$ δηλ $\int_1^x f(t)dt>xf(x)$ (2)

Α3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f(t)dt-(1-x)\cdot f(1-x)$

Η f(t) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0\in\mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση

$\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως και συνεχής .

Η g λοιπόν είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών .

Επίσης : $g(0)=\int_0^0 f(t)dt-f(1)=-f(1)$.

Από την (2) , για x=1 προκύπτει ότι $f(1)<\int_1^1 f(t)dt$

δηλ $f(1)<0$ άρα $g(0)=-f(1)>0$.

Τέλος $g(1)=\int_0^1 f(t)dt$.Από τη (2) για x=0 είναι

$\int_1^0 f(t)dt>0\Rightarrow-\int_0^1 f(t)dt>0\Rightarrow\int_1^0 f(t)dt<0\Rightarrow$ $g(1)<0$

Έτσι $g(0)\cdot g(1)<0$ και σύμφωνα με το θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0\in\left(0,1\right):g(x_0)=0$, άρα η εξίσωση

$\int_0^x f(t)dt=(1-x)f(1-x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) .

Α4. Η F γράφεται :

$$F(x)=\int_2^x \ln t\cdot f(t)dt-\ln x\cdot\int_1^x f(t)dt\ ,\ x>0 \text{ οπότε}$$

$$F'(x)=\ln x\cdot f(x)-\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt-\ln x\cdot f(x)=-\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt\quad ,$$

$$F''(x)=\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt-\frac{1}{x}\cdot f(x)=\frac{\int_1^x f(t)dt-xf(x)}{x^2}>0$$

γιατί $\int_1^x f(t)dt>xf(x)$ από το Α2 ερώτημα .

Αφού $F''(x)>0$, για κάθε x>0 , η F είναι κυρτή .

Α5. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[1,4]$.Έστω F μια αρχική της .Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε ,

$\int_{x_0}^2 f(x)dx+2\int_{x_0}^3 f(x)dx=0$ γράφεται

$$F(2)-F(x_0)+2F(3)-2F(x_0)=0 \ \ \text{δηλ}\ \ F(x_0)=\frac{F(2)+2F(3)}{3}\ .$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η τιμή $\frac{F(2)+2F(3)}{3}$ βρίσκεται στο σύνολο τιμών της F.

Η F ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $[1,4]$ επομένως έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (M) τιμή , είναι δηλ . $m\le F(x)\le M$.

$$\text{Άρα}\ \left.\begin{matrix} m\le F(2)\le M\\ m\le F(3)\le M\end{matrix}\right|\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} m\le F(2)\le M\\ 2m\le 2F(3)\le 2M\end{matrix}\right|\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$3m\le F(2)+2F(3)\le 3M\Leftrightarrow m\le\frac{F(2)+2F(3)}{3}\le M$$

Υπάρχει επομένως ένας τουλάχιστον $x_0\in[1,4]$ ώστε

$$F(x_0)=\frac{F(2)+2F(3)}{3}\ .$$