ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

95

Ον/μο:……………….. Γ΄Λυκείου
Ύλη:Μιγαδικοί(Β΄Λυκείου) Θετ-Τεχν Κατ.
16-3-14

ΘΕΜΑ 1ο:

Α.1. Δώστε τον ορισμό των συζυγών μιγαδικών . **(μον.2)**

Α.2. Δώστε τον ορισμό της ν-οστής δύναμης ενός μιγαδικού αριθμού z. **(μον.3)**

Α.3. Για κάθε θετικό ακέραιο ν>1 να βρείτε το i^{ν} **(μον.5)**

Α.4. Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ (1) με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$ μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (2)$$

Αν Δ<0 να βρείτε τις ρίζες της (1) **(μον.5)**

Β. Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1) Αν $z_1=\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi$ και $z_2=\sigma\upsilon\nu(-\varphi)+i\eta\mu(-\varphi)$, τότε ο z_1+z_2 είναι πραγματικός . **Σ Λ**

2) Αν $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ τότε οι διανυσματικές ακτίνες των z_1,z_2 είναι ομόρροπα διανύσματα . **Σ Λ**

3) Αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο $C: x^2+(y+2)^2=4$ τότε η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι 0 . **Σ Λ**

4) Ισχύει : $|z_1-z_2|\leq|z_1+z_2|$ **Σ Λ**

5) Αν $|z+\alpha i|=|z-\alpha i \,,\, \alpha\in\mathbb{R}^*|$ τότε $z\in\mathbb{R}$ **.** **Σ Λ**

(μον.10)

ΘΕΜΑ 2ο:

Α1.Έστω $w=\dfrac{z^2+3i}{z\bar{z}+5}$

1. Να βρείτε τον $\overline{w}$. **(μον.5)**

2. Αν $z\bar{z}=5$ και $\mathrm{Re}(z)=2$ βρείτε τον $w+\overline{w}$ **.** **(μον.5)**

Α2. Βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων
$z^3+z^2+z=-1$ (1) και $z^{16}\cdot i-z^{15}-2z^5=0$ (2) **(μον.5)**

Α3. Αν το πολυώνυμο $f(z)=\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+.....+\alpha_1 z+\alpha_0$ με $\alpha_0,\alpha_1,....,\alpha_\nu\in\mathbb{R}$, $\alpha_\nu\neq 0$ έχει ρίζα τον w τότε να αποδείξετε ότι έχει και τον $\overline{w}$. **(μον.5)**

Α4. Αν $z=\left|-\bar{z}\right|-7+\left|3+4i\right|\cdot i$ να βρείτε το $|z|$ **(μον.5)**

ΘΕΜΑ 3ο:

Α.

Α1. Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1,z_2 παριστάνονται στο μιγαδικό επίπεδο με τα σημεία P_1 και P_2 αντιστοίχως .Αν $z_2=z_1+\dfrac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι όταν το P_1 κινείται σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας 4 , τότε το P_2 κινείται σε έλλειψη . **(μον.10)**

Α2.Αν M(z), N(w) διαμετρικά σημεία της προηγούμενης έλλειψης, βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-w|$ **(μον.5)**

Β. Αν $|z+6i|=6$ και $|w-4|=2$ να αποδείξετε ότι $|z-2w|\leq 20$ **(μον.5)**

Γ. Έστω $z_1,z_2\in C^*$ με $z_1\neq\pm z_2$ και $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των z_1,z_2 και η αρχή των αξόνων είναι ισοσκελές . **(μον.5)**

ΘΕΜΑ 4^o:

A. Δίνεται ο μιγαδικός $z=(3\eta\mu\alpha-2)+(4-3\sigma\upsilon\nu\alpha)i$, $\alpha\in\mathbb{R}$

A1. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των σημείων M(z) είναι σημεία κύκλου . **(μον.5)**

A2. Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο του z . **(μον.5)**

A3. Να αποδείξετε ότι $2\le|z-2-i|\le 8$ **(μον.5)**

B. Δίνεται ο μιγαδικός w , για τον οποίο ισχύει $w^{2015}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}i$

B1. Να αποδείξετε ότι $|w|=1$ **(μον.3)**

B2. Αν $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ **,** να βρείτε τον $z=(y-xi)^{2015}$ **(μον.4)**

B3. Να αποδείξετε ότι $\left(w-\frac{1}{w}\right)\in I$ και $\left(w+\frac{1}{w}\right)\in\mathbb{R}$ **(μον.3)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1ο:

Α1. Θεωρία **Α2.** Θεωρία **Α3.** Θεωρία **Α4.** Θεωρία

Β. 1 Σ , 2 Σ, 3 Σ, 4 Λ, 5 Σ,

ΘΕΜΑ 2ο:

Α1. 1. Είναι $\overline{w}=\overline{\left(\dfrac{z^2+3i}{z\bar{z}+5}\right)}=\dfrac{\overline{z^2+3i}}{\overline{z\bar{z}+5}}=\dfrac{\overline{z^2}+\overline{3i}}{\overline{z\bar{z}}+\overline{5}}=\dfrac{\bar{z}^2-3i}{\bar{z}z+5}$

2. Είναι : $w+\overline{w}=\dfrac{z^2+3i}{z\bar{z}+5}+\dfrac{\bar{z}^2-3i}{z\bar{z}+5}=\dfrac{z^2+\bar{z}^2}{z\bar{z}+5}=\dfrac{\left(z+\bar{z}\right)^2-2z\bar{z}}{z\bar{z}+5}=$

$=\dfrac{\left(2\operatorname{Re}(z)\right)^2-2z\bar{z}}{z\bar{z}+5}$ άρα $w+\overline{w}=\dfrac{4\cdot 2^2-2\cdot 5}{5+5}$ δηλ $w+\overline{w}=\dfrac{3}{5}$

Α2. Η (1) γράφεται: $z^3+z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z^2(z+1)+(z+1)=0 \Leftrightarrow$

$(z+1)\left(z^2+1\right)=0 \Leftrightarrow z+1=0$ ή $z^2+1=0 \Leftrightarrow$

$z_1=-1$ ή $z_2=i$ ή $z_3=-i$

Ελέγχω ποιες ρίζες επαληθεύουν την (2)

- Για την $z_1=-1$ είναι : $(-1)^{16}\cdot i-(-1)^{15}-2(-1)^5=$
  $=i+1+2=i+3\neq 0$
- Για την $z_2=-i$ είναι $(-i)^{16}\cdot i-(-i)^{15}-2(-i)^5=$
  $=i-i+2i=2i\neq 0$
- Για την $z_2=i$ είναι $i^{16}\cdot i-i^{15}-2i^5=i-(-i)-2i=0$

Η $z_2=i$ λοιπόν είναι κοινή λύση των (1) και (2)

Α3. Έχουμε: $f\left(\overline{w}\right)=\alpha_\nu \overline{w}^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot\overline{w}^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot\overline{w}+\alpha_0=$

$=\alpha_\nu\cdot\overline{w^\nu}+\alpha_{\nu-1}\cdot\overline{w^{\nu-1}}+\ldots..+\alpha_1\overline{w}+\alpha_0=$

$=\overline{\alpha_\nu\cdot w^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot w^{\nu-1}+\ldots.+\alpha_1 w+\alpha_0}=\overline{f(w)}=\bar{0}=0$

Αφού $f\left(\overline{w}\right)=0$, ο $\overline{w}$ είναι ρίζα του f .

Α4. Έχουμε τον $z=\left(\left|-\bar{z}\right|-7\right)+|3+4i|\cdot i=\left(|z|-7\right)+\sqrt{3^2+4^2}\cdot i=$

$=\left(|z|-7\right)+5i$ άρα $|z|=\sqrt{\left(|z|-7\right)^2+5^2}=\sqrt{|z|^2-14|z|+74}$ άρα

$|z|^2=|z|^2-14|z|+74\Leftrightarrow 14|z|=74\Leftrightarrow |z|=\dfrac{74}{14}$ ή $|z|=\dfrac{37}{7}$.

ΘΕΜΑ 3ο:

Α1. Έστω $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=x+yi$. Τότε $\alpha^2+\beta^2=4^2$ (1)

Από την ισότητα $z_2=z_1+\dfrac{4}{z_1}$ έχουμε :

$$x+yi=\alpha+\beta i+\frac{4}{\alpha+\beta i}=\alpha+\beta i+\frac{4(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}\overset{(1)}{=}\alpha+\beta i+\frac{\alpha-\beta i}{4}\Rightarrow$$

$$x+yi=\frac{5\alpha+3\beta i}{4}=\frac{5\alpha}{4}+\frac{3\beta}{4}i\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{5\alpha}{4}\\ y=\dfrac{3\beta}{4}\end{array}\right|\Leftrightarrow \begin{array}{l}\alpha=\dfrac{4x}{5}\\ \beta=\dfrac{4y}{3}\end{array}\quad (2)$$

$$\text{Η (1)}\overset{(2)}{\Rightarrow}\left(\frac{4x}{5}\right)^2+\left(\frac{4y}{3}\right)^2=4^2\Leftrightarrow\frac{16x^2}{25}+\frac{16y^2}{9}=16\Leftrightarrow$$

$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Άρα το P_2 κινείται στην έλλειψη που προέκυψε , με 2α=10 και 2β=6 .

Α2. Είναι :

- $|z-w|_{max}=(A'A)=2\alpha=10$
- $|z-w|_{max}=(B'B)=2\beta=6$

Β. Έχουμε : $|z-2w|=|(z+6i)-6i-2(w-4)-8|=$

$=|(z+6i)-2(w-4)-(8+6i)|\le|z+6i|+2|w-4|+|8+6i|=$

$=6+2\cdot2+\sqrt{8^2+6^2}$ άρα $|z-2w|\le 20$.

Γ. Από την ισότητα $z_1^2+z_2^2=z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2-z_1z_2=0 \Rightarrow$

$\left(z_1^2+z_2^2-z_1z_2\right)\cdot(z_1+z_2)=0\cdot(z_1+z_2) \Leftrightarrow z_1^3+z_2^3=0 \Leftrightarrow$

$z_1^3=-z_2^3$ άρα $\left|z_1^3\right|=\left|-z_2^3\right| \Leftrightarrow |z_1|^3=|z_2|^3 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$ (1)

Αν $A(z_1)$ και $B(z_2)$ η (1) γράφεται (ΟΑ)=(ΟΒ) οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές .

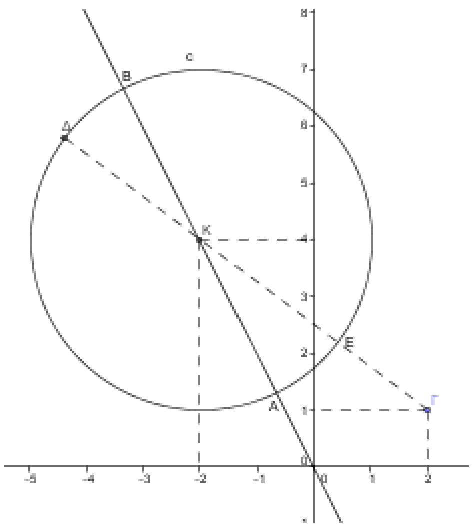
ΘΕΜΑ 4[ο]:

Α1. Είναι $M(3ημα-2, 4-3συνα)$ οπότε αν

$$\left.\begin{array}{l} x=3ημα-2 \\ y=4-3συνα \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} ημα=\dfrac{x+2}{3} \\ συνα=\dfrac{4-y}{3} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ημ^2α=\dfrac{(x+2)^2}{9} \\ συν^2α=\dfrac{(y-4)^2}{9} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{9}=1 \Leftrightarrow C: (x+2)^2+(y-4)^2=9$$ που

παριστάνει κύκλο κέντρου Κ(-2,4) και ακτίνας ρ=3
Στον κύκλο αυτό βρίσκονται οι εικόνες Μ(z) .



Α2. Είναι $(OK)=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ και

- $|z|_{max}=(OB)=(OK)+(KB)=2\sqrt{5}+3$
- $|z|_{min}=(OA)=(OK)-(KA)=2\sqrt{5}-3$

Α.3. Είναι $(ΓK)=\sqrt{(2+2)^2+(4-1)^2}=5$ οπότε:

$|z-2-i|_{max}=(ΓΔ)=(ΓK)+(KΔ)=5+3=8$

$|z-2-i|_{min}=(ΓE)=(ΓK)-(KE)=5-3=2$

άρα $2\le|z-2-i|\le 8$

B1. Έχουμε $|w|^{2015} = \left|\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}i\right| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9} + \frac{1}{9}} = 1$

άρα $|w| = 1$

B2. Είναι : $z = (y - xi)^{2015} = \left[-i(x + yi)\right]^{2015} = -i^{2015} \cdot (x + yi)^{2015} =$

$= -i^3 \cdot (x + yi)^{2015} = -(-i)(x + yi)^{2015} = (x + yi)^{2015} = w^{2015}$

δηλ $z = w^{2015}$

B3. Επειδή $|w| = 1$ είναι $|w|^2 = 1 \Leftrightarrow w\overline{w} = 1 \Leftrightarrow \overline{w} = \frac{1}{w}$.

Έχουμε :

• $w - \frac{1}{w} = w - \overline{w} \in I$ **ως διαφορά συζυγών** .

• $w + \frac{1}{w} = w + \overline{w} \in \mathbb{R}$ **ως άθροισμα συζυγών** .