ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

154

Υλη: Παράγωγοι **Γ΄ Λυκείου**

Ον/μο:……………….. **16-02-14**

Θετ-Τεχν.

ΘΕΜΑ 1^0

Α.1. Αν f , g , h τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

$$\left(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right)' =$$
$$f'(x)g(x)h(x)+g'(x)f(x)h(x)+h'(x)\cdot f(x)g(x)$$ **(μον.5)**

Α.2. 1. Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0; **(μον.5)**

2. Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f; **(μον.5)**

Α3. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ **Σ Λ**

2. Οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+3$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ στο x_0=1 είναι κάθετες **Σ Λ**

3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι «1-1» , τότε η γραφική παράσταση της παραγώγου τέμνει τον x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο . **Σ Λ**

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\alpha,\beta\right]$, τότε ισχύει για την f το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ

5. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $x\cdot f'(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ **,** τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ **Σ Λ**

6. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **,** $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη . **Σ Λ**

7. Τα άκρα α , β του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ στο οποίο ορίζεται μια συνάρτηση f είναι πάντα, όταν η f είναι συνεχής, θέσεις ολικών ακρότατων της συνάρτησης . **Σ Λ**

8. Η γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης $3^{ου}$ βαθμού , έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής **Σ Λ**

9. Η ευθεία x=2 κατακόρυφη ασύμπτωτης της C_f της

$$f(x)=\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$$ **Σ Λ**

10. Η C_f μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες . **Σ Λ**

(μον.10)

ΘΕΜΑ 2^0

Α. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g με $f'(x)-g'(x)=1,\ f'(x)\neq 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Αν στο όριο

$L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου του πηλίκου συναρτήσεων ,προκύπτει μορφή $\dfrac{0}{0}$.

Α1. Να υπολογίσετε το όριο L . **(μον.4)**

Α2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες στο $+\infty$ των C_f και C_g **(μον.4)**

Α3. Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει τον x΄x το πολύ σ΄ ένα σημείο . **(μον.4)**

Α.4. Να αποδείξετε ότι $f(x)-g(x)=x+4,\quad \forall x\in\mathbb{R}$ **(μον.4)**

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln x+(1-x)\cdot\ln(1-x)$

Β.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της . **(μον.2)**

Β.2. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ **(μον.4)**

Β.3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$ **(μον.3)**

ΘΕΜΑ 3⁰

Α. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(\beta)=3f(\alpha)$ **,** για την οποία ισχύει ότι :

$f'(x)=f^2(x)-2f(x)+2,\quad \forall x\in[\alpha,\beta]$

Α.1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα . **(μον.4)**

Α.2. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)>0$ **.** **(μον.4)**

Α.3. Αν f(α)>1 , να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή . **(μον.4)**

β) δεν υπάρχουν τρία σημεία της C_f συνευθειακά **(μον.4)**

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$

Β.1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} **(μον.6)**

Β.2. Να δείξετε ότι $e^{5x}+e^{3x}+e^x\ge(x+1)^5+(x+1)^3+(x+1)$ **(μον.3)**

ΘΕΜΑ 4⁰

Α. Η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη **,** $f(e)=1$ και $\forall x>1$ ισχύει ότι $x\cdot f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1}{2}$.

Α.1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{\ln x}$ **(μον.4)**

Α.2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(e,1) **(μον.4)**

Α.3. Να αποδείξετε ότι $\forall x>1$ ισχύει $2e\sqrt{\ln x}\le x+e$ **(μον.4)**

Β. Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη , ισχύει $f'(0)=f(0)=0$ και $f''(x)>f'(x),\quad \forall x>0$.

Να αποδείξετε ότι :

Β.1. $f'(x)>f(x),\quad \forall x>0$ **(μον.3)**

Β.2. $f(x)>0,\quad \forall x>0$ **(μον.3)**

Β.3. $f(4)>4f(1)$ **(μον.3)**

Β.4. $f(x)\ge f'(1)\cdot(x-1)+f(1),\quad \forall x\ge 1$ **(μον.2)**

Β.5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **(μον.2)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>Απαντήσεις (Ενδεικτικές)</u>

<u>ΘΕΜΑ 1^0</u>

Α.1 , Α.2 Θεωρία
Α3. 1Σ , 2Σ , 3Σ , 4Σ , 5Σ , 6Σ , 7Λ , 8Σ , 9Σ , 10Σ

<u>ΘΕΜΑ 2^0</u>

Α.Α1.Έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+2}{f(x)-x+2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{f'(x)-1}\overset{\upsilon\pi}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{g'(x)}=1$

Α.2.• Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+2\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-2$ οπότε η y=-2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$, η $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Α.3. Έστω ότι η C_g τέμνει τον x΄x σε τουλάχιστον δύο σημεία $M(x_1,0)$, $N(x_2,0)$.Τότε είναι $g(x_1)=g(x_2)=0$ και σύμφωνα με το Θ.Rolle θα υπάρχουν τουλάχιστον ένας $\xi\in\left(x_1,x_2\right):g'(\xi)=0\overset{\upsilon\pi}{\Rightarrow}f'(\xi)=1$, άτοπο αφού $f'(x)\neq1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα η C_g τέμνει τον x΄x το πολύ σ΄ ένα σημείο .

Α.4. Έχουμε ότι : $f'(x)-g'(x)=1\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)'=(x)'\Leftrightarrow$
$f(x)-g(x)=x+c$ **(1)** $\Leftrightarrow f(x)-x=g(x)+c$ άρα
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+c\right]\Rightarrow2=-2+c\Leftrightarrow c=4$
Η (1) γίνεται : $f(x)-g(x)=x+4$, $x\in\mathbb{R}$

B.B.1. Πρέπει $\begin{matrix} x>0 \\ 1-x>0 \end{matrix} \Bigg| \Leftrightarrow \begin{matrix} x>0 \\ x<1 \end{matrix}$ οπότε $\boxed{A_f=(0,1)}$

B.2.• Είναι : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}\right)^{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}\underset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1-x)\cdot\ln\left(1-x\right)\right]=1\cdot\ln 1=0$

οπότε $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^2\ln x+(1-x)\cdot\ln(1-x)\right]=0}$

•Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1-x\right)\cdot\ln(1-x)\overset{1-x=y}{=}\lim\limits_{y\to 0^+}\left(y\cdot\ln y\right)=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\ln y}{\dfrac{1}{y}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{LH}{=}}$

$\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{y}}{-\dfrac{1}{y^2}}=\lim\limits_{y\to 0^+}\left(-y\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2\ln^2 x\right)=1\cdot\ln 1=0$

οπότε $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-}\left[x^2\ln x+(1-x)\ln(1-x)\right]=0}$

B.3. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ f(x), & 0<x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ η οποία

είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών ,

$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=g(0)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0=g(1)$

οπότε η g είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$.

Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$ -αφού είναι η f- και $g(0)=g(1)$.Σύμφωνα με το Θ.Rolle , υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi\in\left(0,1\right):g'(\xi)=0$ δηλ . $f'(\xi)=0$, αφού στο $(0,1)$ είναι $f(x)=g(x)$.

ΘΕΜΑ 3^{0}

Α .Α.1. Έχουμε ότι $f'(x)=f^2(x)-2f(x)+2=f^2(x)-2f(x)+1+1=$
$=\left[f(x)-1\right]^2+1>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα .

Α.2. Έχουμε : $\alpha<\beta \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\alpha)<f(\beta) \overset{\upsilon\pi}{\Rightarrow} f(\alpha)<3f(\alpha)\Rightarrow f(\alpha)>0$

Α.3.α) Είναι : $f''(x)=\left(\left[f(x)-1\right]^2+1\right)'=2(f(x)-1)\cdot f'(x)$ **(1)**

όμως: $x\geq\alpha \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)\geq f(\alpha)>1\Rightarrow f(x)>1\Rightarrow f(x)-1>0$
και από την (1) είναι $f''(x)>0,\quad \forall x\in\left[\alpha,\beta\right]$, οπότε η f
είναι κυρτή .

β) Έστω υπάρχουν τρία σημεία $A\left(x_1,f(x_1)\right)$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma\left(x_3,f(x_3)\right)$ της C_f συνευθειακά .Τότε :

- σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1\in\left(x_1,x_2\right)$, $\xi_2\in\left(x_2,x_3\right)$:
$f'\left(\xi_1\right)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$ και επειδή
Α , Β , Γ συνευθειακά είναι $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}$ άρα $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

- Για την f΄ , ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ .Rolle στο $\left[\xi_1,\xi_2\right]$ άρα θα υπάρχει $\xi\in\left(\xi_1,\xi_2\right)$: $f''(\xi)=0$ **, άτοπο** γιατί $f''(x)>0$.

Β. Β1. • Η f έχει $A_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα.

- $f''(x)=20x^3+6x=2x(10x^2+3)$ οπότε
$\rightarrow$ στο $\left(-\infty,0\right]$ είναι $f''(x)\leq 0$, άρα f κοίλη
$\rightarrow$ στο $\left[0,+\infty\right)$ είναι $f''(x)\geq 0$, άρα f κυρτή
- Αφού $f\uparrow$, είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται .

Β2. Η ανισότητα $e^{5x}+e^{3x}+e^{x}\ge (x+1)^5+\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)$ γράφεται

ισοδύναμα : $f\left(e^{x}\right)\ge f(x+1)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x}\ge x+1$ **(1)**

Η εφαπτομένη της $g(x)=e^{x}$ στο $M(0,1)$ είναι η

$y-g(0)=g'(0)(x-0)$ δηλ $y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$

Η $g(x)=e^{x}$ έχει $g'(x)=e^{x}$, $g''(x)=e^{x}>0$ άρα είναι κυρτή.

Η (1) επομένως ισχύει .Άρα ισχύει και η αρχική .

<u>ΘΕΜΑ 4⁰</u>

Α.Α.1. Έχουμε ότι $xf(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2}$, $\forall x>1$ άρα

$2f(x)f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(f^{2}(x)\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow f^{2}(x)=\ln x+c$ **(1)**

Αλλά $f(e)=1\underset{x=e}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}1^{2}=\ln e+c\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f^{2}(x)=\ln x$ **(2)**

Η lnx , στο $(1,+\infty)$, δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής , άρα διατηρεί πρόσημο .Από την (2) λοιπόν προκύπτει ότι $f(x)=\sqrt{\ln x}$ ή $f(x)=-\sqrt{\ln x}$.Επειδή $f(e)=1>0$ η αρνητική τιμή απορρίπτεται .Άρα $f(x)=\sqrt{\ln x}$

Α.2. Είναι $f'(x)=\left(\sqrt{\ln x}\right)'=\frac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$,

$f(e)=1$ και $f'(e)=\frac{1}{2e\sqrt{\ln e}}=\frac{1}{2e}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(e,1)$ έχει εξίσωση

$y-f(e)=f'(e)(x-e)$ δηλ $y-1=\frac{1}{2e}(x-e)$ δηλ .

$\varepsilon: y=\frac{1}{2e}\cdot x+\frac{1}{2}$.

A.3. Είναι $f''(x)=\left(\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\right)'=-\dfrac{\left(2x\sqrt{\ln x}\right)'}{4x^2\cdot\ln x}=$

$$=-\frac{2\sqrt{\ln x}+2x\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}}{4x^2\ln x}<0\quad \forall x\in(1,+\infty)$$ οπότε η f είναι κοίλη.

Άρα θα ισχύει

$$f(x)\le\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\ln x}\le\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow \boxed{2e\sqrt{\ln x}\le x+e}$$

B. B1. Αφού $f''(x)>f'(x)$ **(1)** , $\forall x>0\Leftrightarrow\left(f'(x)-f(x)\right)'>0$

άρα η $\boxed{f'(x)-f(x)\nearrow}\overset{x>0}{\Rightarrow}f'(x)-f(x)>f'(0)-f(0)$ δηλ

$f'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow\boxed{f'(x)>f(x)}$ **(2)**

B2. Αφού $f'(x)>f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)>0\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x>0$

$$\overset{\cdot(e^x)^2}{\Leftrightarrow}\frac{f'(x)e^x-f(x)(e^x)'}{\left(e^x\right)^2}>0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'>0$$ άρα η

$$\frac{f(x)}{e^x}\uparrow\overset{x>0}{\Rightarrow}\frac{f(x)}{e^x}>\frac{f(0)}{e^0}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x}>0\Leftrightarrow\boxed{f(x)>0}\ \textbf{(3)}$$

οι (1) , (2) , (3)$\Rightarrow$ $\boxed{f''(x)>f'(x)>f(x)>0\,!!!}$

B3. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ $\exists\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,4)$:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)\ ,\ f'(\xi_2)=\frac{f(4)-f(1)}{3}\ .$$

Αλλά $\xi_1<\xi_2\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow f(1)<\dfrac{f(4)-f(1)}{3}\Leftrightarrow\boxed{f(4)>4f(1)}$

Β.4. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (1, x) : f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

οπότε :

$$\xi > 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) > f'(1) \Rightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > f'(1) \Rightarrow f(x) \geq f'(1)(x-1) + f(1)$$

Το = ισχύει για x=1 .

Β.5. Επειδή $f'(1) > 0$, x-1>0 , είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(1)(x-1) + f(1)\right] = +\infty$.

Αφού $f(x) \geq f'(1)(x-1) + f(1)$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.