ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

153

Υλη: Μιγαδικοί-Συναρτήσεις-Όρια **Γ΄ Λυκείου**

Ον/μο:……………….. **08-12-13**

Θετ-Τεχν.

ΘΕΜΑ 1^0

Α.1. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη να αποδείξετε ότι :

1. Υπάρχει η f^{-1} . **(μον.5)**

2. Η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f . **(μον.5)**

3. Όταν η f είναι γνησίως αύξουσα , τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην διχοτόμο y=x του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου . **(μον.5)**

Α2. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. Αν $z = \dfrac{\frac{1}{x} - xi}{x + \frac{i}{x}}$, $x \in \mathbb{R}^*$ τότε $\left|z^{-1}\right| = 1$ **Σ Λ**

2. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = 2x + 1$.Τότε $(fof)(3) = -1$ **Σ Λ**

3.Αν $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^5 + 4x^4 - \alpha x^3 + 2x^2 - 1}{x + 1} = \beta$ **,** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε α+β=-7 **Σ Λ**

4. Αν P(x) πολυώνυμο περιττού βαθμού , τότε υπάρχου**ν** αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $P(\alpha) \cdot P(\beta) < 0$ **Σ Λ**

5. Αν $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 2x$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 4\alpha^2 + 2$ **Σ Λ**

(μον.10)

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΘΕΜΑ 2⁰

Β.1. α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{z\to x}\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ όταν :

1. $f(x)=\sqrt{x}$ **2.** $f(x)=x^3$ **(μον.6)**

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{\eta\mu(3y-3x)}{x^4-y^4}$, $x\neq 0$ **(μον.3)**

Β.2. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο της

συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{3x-6}, & x>2\\ 5\ , & x=2\\ \dfrac{x^2-4}{x^3-8}\ , & x<2\end{cases}$ στο $x_0=2$ **(μον.6)**

Β.3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$f(x)=f(4-x)$. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)f(x)}{\eta\mu\pi x}=10$ υπολογίστε τα

1. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ **(μον.10)**

ΘΕΜΑ 3⁰

Γ.1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε

$f^3(x)+f(x)=3\eta\mu 4x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ **(μον.7)**

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ **(μον.6)**

Γ.2. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\alpha x+4\beta x}{\eta\mu\left(x\alpha^2\right)+\eta\mu(x\beta^2)}=1$ **,** να αποδείξετε ότι

ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(α,β) είναι κύκλος
από τον οποίο εξαιρείται ένα σημείο . **(μον.6)**

Γ.3. Έστω πολυώνυμο f(x) για το οποίο ισχύουν

$f(0)=-3$, $f(2)=5$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+\alpha}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2+\alpha}=\beta$,

$\beta\neq 0$ βρείτε το πολυώνυμο και τα α, β . **(μον.6)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

Δ.1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^3(x)+f(x)=10x$ (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα . **(μον.5)**

2. Να βρεθούν οι f(0) και f(1) **(μον.3)**

3. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $f(-1+f^{-1}(x+3))=0$ **(μον.3)**

4. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $|z+6i|=6$ και $|w-4|=2$.Να αποδειχθεί ότι $f(|z-2w|)\le f(20)$. **(μον.7)**

5. Αν $x=|z+1-i|$ και $f(e^{x^2-x}-e^{x+3})=f(2x+3-x^2)$ να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z . **(μον.7)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0

Α.1. 1. Έστω ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ή $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

δηλ $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) \neq f(x_2)$.Άρα η f είναι «1-1» επομένως αντιστρέφεται .

Όμοια αν f γνησίως φθίνουσα .

2 . Έστω f γν . αύξουσα .Τότε $\forall x_1, x_2 \in A$ με

$x_1 < x_2$ **(1)** $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ δηλ $y_1 < y_2$ με $y_1, y_2 \in f(A)$.

Αν ήταν $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ τότε $x_1 \geq x_2$, άτοπο λόγω της (1)

Άρα έχουμε $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, δηλ η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα . Όμοια αν η f είναι γν .φθίνουσα .

3. Έστω $M(x_0, y_0)$ ένα κοινό σημείο των C_f και C_f^{-1} .

Τότε $x_0 \in \left(A \cap f(A)\right)$ και $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ **(1)**

Θα δείξουμε ότι $f(x_0) = x_0$.Πράγματι , έστω $f(x_0) > x_0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$f^{-1}(x_0) > x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0)$, άτοπο.

Ομοια αν υποθέσουμε ότι $f(x_0) < x_0$.

Άρα $f(x_0) = x_0$ και συνεπώς το σημείο $M(x_0 , y_0)$ ανήκει στην y=x

Α.2. 1**Σ** , 2**Λ,** 3**Σ** , 4**Σ** , 5**Λ**

ΘΕΜΑ 2^0

Β.1.

α) 1.

• Αν x>0 είναι $\lim\limits_{z\to x}\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim\limits_{z\to x}\dfrac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x} =$

$= \lim\limits_{z\to x}\dfrac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{z\to x}\dfrac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

• Αν x=0 τότε $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim\limits_{z\to 0^+}\dfrac{\sqrt{z}}{z} = \lim\limits_{z\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{z}} = +\infty$

2. Είναι $\lim\limits_{z\to x}\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim\limits_{z\to x}\dfrac{z^3-x^3}{z-x}=\lim\limits_{z\to x}\dfrac{(z-x)\left(z^2+zx+x^2\right)}{z-x}$

$=\lim\limits_{z\to x}\left(z^2+zx+x^2\right)=3x^2$

β) Είναι : $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{\eta\mu(3y-3x)}{x^4-y^4}=\lim\limits_{y\to x}\dfrac{\eta\mu\left[3(y-x)\right]}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}=$

$=\lim\limits_{y\to x}\left[-3\dfrac{\eta\mu3\left(y-x\right)}{3(y-x)}\cdot\dfrac{1}{(x+y)(x^2+y^2)}\right]=-3\cdot1\cdot\dfrac{1}{2x\cdot2x^2}=-\dfrac{3}{4x^3}$

Β.2. Για να υπάρχει το όριο της f στο $x_0=2$ πρέπει $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$. Είναι :

- $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{3x-6}=\dfrac{4+2\alpha+\beta}{0}$ και επειδή το όριο είναι πραγματικός αριθμός πρέπει κατ' αρχάς $4+2\alpha+\beta=0$ δηλ $2\alpha+\beta=-4$ **(1)**

  Τότε $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+\alpha x-4-2\alpha}{3x-6}=$

  $=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)+\alpha(x-2)}{3(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+2+\alpha}{3}\right)=\dfrac{4+\alpha}{3}$

  Πρέπει λοιπόν $\dfrac{1}{3}=\dfrac{4+\alpha}{3}\Leftrightarrow\alpha=-3$ και από την (1) προκύπτει β=2 .

Β.3.

1. Θέτω $\dfrac{(1-x)\cdot f(x)}{\eta\mu\pi x}=g(x)\overset{x\neq1}{\Leftrightarrow}f(x)=\dfrac{g(x)\cdot\eta\mu\pi x}{1-x}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\dfrac{\eta\mu\pi x}{1-x}$

Είναι : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\eta\mu\pi x}{1-x}\overset{x-1=y}{=}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\eta\mu\pi(1+y)}{-y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\eta\mu(\pi+\pi y)}{-y}=$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{-\eta\mu(\pi y)}{-y}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{\eta\mu(\pi y)}{\pi y}\right] = \pi\cdot 1 = \pi \quad \text{και άρα}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[g(x)\cdot\frac{\eta\mu\pi x}{1-x}\right] = 10\cdot\pi$$

2. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \overset{(\upsilon\pi)}{=} \lim\limits_{x\to 3} f(4-x) \overset{4-x=y}{=} \lim\limits_{y\to 1} f(y) \overset{(1)}{=} 10\pi$

ΘΕΜΑ 3^0

Γ.1

1. Από την ισότητα $f^3(x)+f(x)=3\eta\mu 4x \Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+1\right]=3\eta\mu 4x \Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{3\eta\mu 4x}{f^2(x)+1} \text{ άρα } |f(x)| = \frac{|3\eta\mu 4x|}{|f^2(x)+1|} = \frac{3|\eta\mu 4x|}{f^2(x)+1} \le 3|\eta\mu 4x| \Leftrightarrow$$

$$-3|\eta\mu 4x| \le f(x) \le 3|\eta\mu 4x| \overset{\kappa.\pi}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

2. Στο 1 ερώτημα είχαμε $f(x)=\dfrac{3\eta\mu 4x}{f^2(x)+1}$ άρα αν $x\neq 0$ είναι:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3\eta\mu 4x}{x}\cdot\frac{1}{f^2(x)+1} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = 3\cdot 4\cdot\frac{\eta\mu 4x}{4x}\cdot\frac{1}{f^2(x)+1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 12\cdot 1\cdot\frac{1}{0+1} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 12$$

Γ.2. Από το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\alpha x+4\beta x}{\eta\mu(x\alpha^2)+\eta\mu(x\beta^2)} = 1 \overset{(:x)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\alpha+4\beta}{\dfrac{\eta\mu(x\alpha^2)}{x}+\dfrac{\eta\mu(x\beta^2)}{x}} = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\alpha+4\beta}{\alpha^2\cdot\dfrac{\eta\mu(x\alpha^2)}{x\alpha^2}+\beta^2\dfrac{\eta\mu(x\beta^2)}{x\beta^2}} = 1 \Rightarrow \frac{3\alpha+4\beta}{\alpha^2\cdot 1+\beta^2\cdot 1} = 1 \quad \text{άρα}$$

$$\alpha^2+\beta^2-3\alpha-4\beta=0\Leftrightarrow\left[\alpha^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot\alpha+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+\left[\beta^2-4\beta+4\right]=$$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+4\Leftrightarrow\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2+(\beta-2)^2=\frac{25}{4}$ άρα ο γ.τ των σημείων $M(\alpha,\beta)$ είναι κύκλος κέντρου $K\left(\frac{3}{2},2\right)$ με $\rho=\frac{5}{2}$ από τον οποίο εξαιρείται το σημείο $O(0,0)$.

Γ.3. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+\alpha}=1$ το $f(x)$ είναι της μορφής $f(x)=x^2+\kappa x+\lambda$.

Από τις ισότητες

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-3 \\ f(2)=5 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=-3 \\ 4+2\kappa-3=5 \end{array}\right| \Rightarrow \lambda=-3 \text{ και } \kappa=2 \text{ άρα } f(x)=x^2+2x-3$$

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+\alpha}=\beta\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x-3}{x^2+\alpha}=\beta$ **(1)**

- Αν $\alpha\neq-1\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{0}{1+\alpha}=\beta\Rightarrow\beta=0$, απορ. γιατί είναι $\beta\neq0$.
- Αν $\alpha=-1\overset{(1)}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\beta\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\beta\Rightarrow$

  β=2 . Άρα οι τιμές των α και β είναι α=-1 και β=2

ΘΕΜΑ 4^0

Δ.1.

1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ώστε $x_1<x_2\Rightarrow10x_1<10x_2\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow$

$(f^3(x_1)-f^3(x_2))+\left(f(x_1)-f(x_2)\right)<0\Rightarrow$

$\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\left(\underbrace{f^2(x_1)+f(x_1)\cdot f(x_2)+f^2(x_2)+1}_{>0}\right)<0$ άρα

$f(x_1)-f(x_2)<0\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα .

2.

- Για $x=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)+1\right]=0 \Leftrightarrow f(0)=0$
- Για $x=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} f^3(1)+f(1)=10 \Leftrightarrow f^3(1)+f(1)-10=0 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$
  $(f(1)-2)(f^2(1)+2f(1)+5)=0 \Leftrightarrow f(1)=2$

3. Έχουμε : $f(-1+f^{-1}(x+3))=0=f(0) \overset{f\,"1-1"}{\Leftrightarrow} -1+f^{-1}(x+3)=0 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(x+3)=1=f^{-1}(2) \overset{f^{-1}"1-1"}{\Leftrightarrow} x+3=2 \Leftrightarrow x=-1$

4. Είναι :

$|z-2w|=|(z+6i)-(2w-8)-6i-8|\le|z+6i|+|2w-8|+|6i+8|=$

$=6+2\cdot 2+10=20$ δηλ. $|z-2w|\le 20 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(z-2w)\le f(20)$

5. Από την $f\left(e^{x^2-x}-e^{x+3}\right)=f(2x+3-x^2) \overset{f\,"1-1"}{\Leftrightarrow}$

$e^{x^2-x}-e^{x+3}=2x+3-x^2 \Leftrightarrow e^{x^2-x}-e^{x+3}=(x+3)-(x^2-x) \Rightarrow$

$e^{x^2-x}+(x^2-x)=e^{x+3}+(x+3) \overset{g(x)=e^x+x}{\Leftrightarrow} g(x^2-x)=g(x+3) \underset{1-1}{\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}}$

$x^2-x=x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή x=3

Επειδή $x=|z+1-i|$ δεκτή ή τιμή x=3 οπότε

$|z+1-i|=3 \Leftrightarrow |z-(-1+i)|=3$ άρα γεωμετρικός τόπος

των εικόνων του z είναι κύκλος κέντρου K(-1,1) και ρ=3 .

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ