ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

151

Υλη: Μιγαδικοί **Γ΄ Λυκείου**
Ον/μο:……………….. **29-10-13**
Θετ-Τεχν.

<u>ΘΕΜΑ 1^0</u>

Α. Να αποδείξετε ότι :
« Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτινών τους» **(μον.6)**

Β. Για κάθε θετικό ακέραιο ν , να υπολογίσετε το i^{ν} **(μον.6)**

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις .

α. Αν η εξίσωση $|z-2|=|z-\kappa i|$ επαληθεύεται από τους μιγαδικούς αριθμούς που η εικόνα τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία y=x , ο πραγματικός αριθμός κ ισούται με :
Α. 1 **Β.**-1 **Γ.** 2 **Δ.**-2 **Ε.**4

β. Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με α , β , $\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $2-i$ θα έχει και τον :
Α. $2+i^{20}$ **Β.** $\dfrac{1}{2+i^{20}}$ **Γ.** $2+i^{33}$ **Δ.** $\dfrac{1}{2-i}$ **Ε.** $2-i^{4}$

γ. Ο μιγαδικός αριθμός z είναι πραγματικός όταν :
Α. $z\cdot\bar{z}=1$ **Β.** $\overline{\bar{z}-z}=0$ **Γ.** $\overline{z+\bar{z}}=0$ **Δ.** $z+\bar{z}=0$
Ε. τίποτα από τα προηγούμενα .

δ. Αν το σημείο P(x,y) είναι εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο , για τον οποίο ισχύει $|z-3|=5$, το P βρίσκεται πάνω σε :
Α. ευθεία **Β.** Έλλειψη **Γ.** Παραβολή **Δ.** Υπερβολή
Ε. τίποτα από τα προηγούμενα .

(μον.8)

Δ. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί **(Σ)** και ποιοι λανθασμένοι **(Λ)** .

α. Αν $|z|=2$, τότε $z=2$ ή $z=-2$. **Σ** **Λ**

β. Αν $|z|+|w|=0$ **, τότε** $z=w=0$**.** **Σ** **Λ**

γ.Το μέτρο του μιγαδικού $\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in C$, είναι ίσο με $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. **Σ** **Λ**

δ.Ισχύει $\sqrt{z\cdot\bar{z}}=|z|$ για κάθε μιγαδικό z **Σ** **Λ**

ε. Ισχύει $|z^2|=z^2$ για κάθε z **Σ** **Λ**

(μον.5)

ΘΕΜΑ 2^0

Δίνεται η παράσταση $f(z)=\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot z}{|z+10i|-|z-10i|}$

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές του z ορίζεται η f **(μον.6)**

Β. Να αποδείξετε ότι :

α) $\big||z+10i|-|z-10i|\big|\le 2|z|$ **(μον.6)**

β) $|f(z)|\ge 1$ **(μον.6)**

γ) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z , για τους οποίους ισχύει $|f(z)|=\dfrac{1}{6}|z|$, είναι υπερβολή , της να βρείτε την εξίσωση . **(μον.7)**

ΘΕΜΑ 3^0

Δίνεται η εξίσωση $z^2-\alpha z+\beta=0,\quad z\in\mathbb{C},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$
και z_1,z_2 είναι οι ρίζες της με $z_1=2+i$

Α. Να βρείτε τους αριθμούς α, β **(μον.5)**

Β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2013}+z_2^{2013}$ είναι πραγματικός **(μον.5)**

Γ. Έστω $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1,\ z_2,\ z_3$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με

$z_3=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{1}{5}\cdot\left(17+i\right)$, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές . **(μον.5)**

β) Αν $|w-z_1|=|\overline{w}-z_1|$, να αποδείξετε ότι $w\in\mathbb{R}$ **(μον.5)**

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w , που επαληθεύουν την εξίσωση $|w-z_2|+|\overline{w}-z_2|=10$, βρίσκονται σε έλλειψη . **(μον.5)**

ΘΕΜΑ 4^0

Α. Έστω το πολυώνυμο $f(z)=\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+....+\alpha_1 z+\alpha_0$ με $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_\nu\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\overline{f(z)}=f(\overline{z})$ **(μον.6)**

Β. Έστω το $f(z)=(z-z_1)(z-\overline{z_1})(z-z_2)(z-\overline{z_2})$ και $f(i)=64-8i$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(-i)=64+8i$ **(μον.6)**

β) $(1+z_1^2)\cdot\left(1+\overline{z}_1^{\,2}\right)\cdot(1+z_2^2)\cdot\left(1+\overline{z}_2^{\,2}\right)=4160$ **(μον.7)**

γ) Αν $Re(z_1)=-2$ και $Re(z_2)=2$ να δείξετε ότι $|z_1|=3$ και $|z_2|=\sqrt{7}$ **(μον.6)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Θεωρία **Β.** Θεωρία

Γ. α) Γ **β)** Γ **γ)** Β **δ)** Ε
Δ. α) Λ **β)**Σ **γ)**Λ **δ)**Σ **ε)**Λ

ΘΕΜΑ 2^0

Α. Η f ορίζεται όταν ο παρανομαστής της δεν είναι μηδέν .Αν λοιπόν $|z+10i|-|z-10i|=0 \Leftrightarrow |z+10i|=|z-10i|$ οπότε οι εικόνες του z είναι στη μεσοκάθετο του ΑΒ με Α(10i) και Β(-10i). Επειδή 10i και -10i συζυγείς η μεσοκάθετος του ΑΒ είναι ο x΄x , οπότε ο z θα είναι πραγματικός .
Άρα η f ορίζεται για τους $z \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$.

Β. α) Είναι : $\big||z+10i|-|z-10i|\big| \le |z+10i+z-10i| = |2z| = 2\cdot|z|$

β) Είναι :$|f(z)| = \dfrac{|\sqrt{3}+i|\cdot|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} = \dfrac{2\cdot|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} \ge \dfrac{2|z|}{2|z|} = 1$

γ) Είναι : $|f(z)| = \dfrac{1}{6}|z|$ άρα $\dfrac{2|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} = \dfrac{1}{6}|z| \Leftrightarrow$

$\big||z+10i|-|z-10i|\big| = 12$. Αν $E_1(-10i)$ και $E_2(10i)$ τότε $(E_1E_2) = 20 > 12$ οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι υπερβολή με εστίες τις E_1 και E_2 .

Είναι 2α=12 , 2γ=20 και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 100 - 36 = 64$

οπότε η εξίσωση της υπερβολής είναι η $C: \dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{64} = 1$

ΘΕΜΑ 3^0

Α. Η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι η $z_2 = 2 + i$. Από τους τύπος Vieta είναι : $\left.\begin{matrix} z_1 + z_2 = \alpha \\ z_1 z_2 = \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 4 \\ \beta = 5 \end{matrix}$

Β. Οι ρίζες z_1 και z_2 είναι συζυγείς οπότε το άθροισμα $z_1^{2013} + z_2^{2013}$ είναι **πραγματικός ως άθροισμα συζυγών**.

Γ. α) Είναι : $z_3 = \dfrac{2+i}{2-i} + \dfrac{1}{5}(17+i) = 4 + i$.

Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι Α(2,1) , Β(2,-1) και Γ(4,1) .

Έτσι :

$(AB) = |z_2 - z_1| = |2 - i - 2 - i| = |-2i| = 2$

$(B\Gamma) = |z_3 - z_2| = |4 + i - 2 + i| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$

$(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |2 + i - 4 - i| = |-2| = 2$

Παρατηρούμε ότι $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2$ και $(AB) = (A\Gamma)$.

Άρα το τρίγωνο **ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές** .

β) Έχουμε : $|w - z_1| = |\overline{w} - z_1| \overset{|z|=|\overline{z}|}{\Leftrightarrow} |w - z_1| = |\overline{\overline{w} - z_1}| \Leftrightarrow$

$|w - z_1| = |w - \overline{z_1}|$ άρα οι εικόνες του w είναι στην μεσοκάθετο των εικόνων των συζυγών z_1 και $\overline{z_1}$, δηλ στον x΄x . Άρα $w \in \mathbb{R}$.

γ) Έχουμε : $|w - z_2| + |\overline{w} - z_2| = 10 \Leftrightarrow |w - z_2| + |\overline{\overline{w} - z_2}| = 10 \Leftrightarrow$

$|w - z_2| + |w - \overline{z_2}| = 10 \Leftrightarrow |w - z_2| + |w - z_1| = 10 \Leftrightarrow$

$|w - (2+i)| + |w - (2-i)| = 10$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w βρίσκονται στην **έλλειψη** με εστίες $E_1(2,1)$ και $E_2(2,-1)$, αφού $(E_1E_2) = 2 = 2\gamma < 10 = 2\alpha$

<u>ΘΕΜΑ 40</u>

Α. Έχουμε : $f(z)=\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+.....+\alpha_1 z+\alpha_0$ άρα

$$\left(\overline{f(z)}\right)=\overline{\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+....+\alpha_1 z+\alpha_0}=$$

$$=\overline{\alpha_\nu z^\nu}+\overline{\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}}+...+\overline{\alpha_1 z}+\overline{\alpha_0}=$$

$$=\alpha_\nu \overline{z^\nu}+\alpha_{\nu-1}\cdot\overline{z^{\nu-1}}+....+\alpha_1\cdot\bar{z}+\alpha_0=$$

$$=\alpha_\nu \bar{z}^\nu+\alpha_{\nu-1}\bar{z}^{\nu-1}+....+\alpha_1\bar{z}+\alpha_0=f(\bar{z})$$

Β. α) Είναι : $f(-i)=f\left(\bar{i}\right)\overset{(A)}{=}\overline{f(i)}=\overline{64-8i}=64+8i$

β) Είναι : $(1+z_1^2)\cdot\left(1+\bar{z}_1^2\right)\cdot(1+z_2^2)\cdot\left(1+\bar{z}_2^2\right)=$

$$=\left(z_1^2-i^2\right)\left(\bar{z}_1^2-i^2\right)\left(z_2^2-i^2\right)\left(\bar{z}_2^2-i^2\right)=$$

$$=(z_1-i)\cdot(z_1+i)\left(\bar{z}_1-i\right)\left(\bar{z}_1+i\right)(z_2-i)(z_2+i)\left(\bar{z}_2-i\right)\left(\bar{z}_2+i\right)=$$

$$=\left[(z_1-i)(\bar{z}_1-i)(z_2-i)(\bar{z}_2-i)\right]\cdot\left[(z_1+i)\left(\bar{z}_1+i\right)(z_2+i)\left(\bar{z}_2+i\right)\right]=$$

$$=f(i)\cdot f(-i)=(64-8i)(64+8i)=64^2+8^2=4160$$

γ) Είναι $z_1+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z_1)=-4$ και $z_2+\bar{z}_2=2\mathrm{Re}(z_2)=4$ **(1)**

Έχουμε : $f(i)=(i-z_1)(i-\bar{z}_1)(i-z_2)(i-\bar{z}_2)=$

$$=\left(-1-\bar{z}_1 i-z_1 i+z_1\bar{z}_1\right)\cdot\left(-1-\bar{z}_2 i-z_2\bar{z}_2\right)=$$

$$=\left[\left(|z_1|^2-1\right)-\left(z_1+\bar{z}_1\right)i\right]\cdot\left[\left(|z_2|^2-1\right)-\left(z_2+\bar{z}_2\right)i\right]\overset{(1)}{=}$$

$$=\left[\left(|z_1|^2-1\right)+4i\right]\cdot\left[\left(|z_2|^2-1\right)-4i\right]=$$

$$=\left[\left(|z_1|^2-1\right)\cdot\left(|z_2|^2-1\right)+16\right]+4\left[\left(|z_2|^2-1\right)-\left(|z_1|^2-1\right)\right]i=$$

$$=\left[\left(|z_1|^2-1\right)\cdot\left(|z_2|^2-1\right)+16\right]+4\left(|z_2|^2-|z_1|^2\right)\cdot i \quad \textbf{(2)}$$

Αλλά $f(i)=64-8i$ οπότε , από (2) είναι :

$4\left(|z_2|^2-|z_1|^2\right)=-8$ **(3)** και $\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)+16=64$ **(4)**

Από (3)$\Rightarrow |z_1|^2=|z_2|^2+2$ **(5)** και η **(4)** γίνεται :

$\left(|z_2|^2+1\right)\left(|z_2|^2-1\right)=48 \Leftrightarrow |z_2|^4=49 \Leftrightarrow |z_1|^2=7 \Leftrightarrow |z_1|=\sqrt{7}$

Η **(5)** $\Rightarrow |z_1|^2=9$ άρα $|z_1|=3$.