ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

150(Α)

Υλη:Μιγαδικοί-Ορια-Συνέχεια **Γ΄ Λυκείου**

Ον/μο:……………….. **06-10-13**

Θετ-Τεχν.

<u>ΘΕΜΑ 1^0</u>

Α.1. Δώστε τον ορισμό του συνόλου C των μιγαδικών αριθμών .

2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται «1-1»;

3. Διατυπώστε το κριτήριο παρεμβολής . **(μον.9)**

Β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες x0y και x΄0y΄ **(μον.6)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. Αν u , v $\in C$ και $u^2+v^2=0$ τότε u=v=0. **Σ Λ**

2. Αν $z \in C$ τότε $z^2 \geq 0$ **.** **Σ Λ**

3. Ο αριθμός $(4+6i)^{10} + (4-6i)^{10}$ είναι φανταστικός . **Σ Λ**

4. $|z_1|+|z_2|+|z_3| \geq |z_1 - z_2 - z_3|$. **Σ Λ**

5. Αν $f \cdot g$ συνεχής στο R τότε και f και g συνεχείς στο R. **Σ Λ**

6. Η $g(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής. **Σ Λ**

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x^3 - x^2 + 1| - x^3 + x^2}{x^2} = 0$. **Σ Λ**

8. Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0 , τότε $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 \cdot f(x)\right) = 0$. **Σ Λ**

9. Αν $|z-3-4i| \leq 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} |z|^x = +\infty$ **.** **Σ Λ**

10. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 4$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 2$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -2$. **Σ Λ**

(μον.10)

ΘΕΜΑ 2^0

Α. Έστω η εξίσωση $z^2+\alpha z+\beta=0$, $\alpha,\beta\in R$

1. Αν z_1 , z_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να δείξετε ότι ο αριθμός $w=\dfrac{z_1+z_2+2\beta i}{2z_1z_2+\alpha i}$ είναι φανταστικός . **(μον.3)**

2. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζα της μορφής $\lambda\cdot(1+i)$, $\lambda\in R^*$ να δείξετε ότι : **i)** $\beta>0$ **ii)** $\beta=\dfrac{1}{2}\alpha^2$ **(μον.6)**

Β. Έστω οι μιγαδικοί z_1,z_2 και ο ακέραιος ν>1 **,** ώστε $z_1^\nu=2+i$ και $z_2^\nu=1+2i$ **.**

1. Να αποδείξετε ότι $w=\dfrac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός .

2. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του w είναι στον μοναδιαίο κύκλο .

3. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ είναι φανταστικός .

4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης $f(\alpha)=|\alpha+w|+|\alpha-w|$ όπου $\alpha\in C$ **(μον.16)**

ΘΕΜΑ 3^0

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $(1+\infty)$ και ισχύει $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}-1$ για κάθε $x\in R$.

1. Να βρείτε την f **(μον.6)**

2. Να βρείτε την f^{-1} **(μον.6)**

3. Αν η C_g συνάρτησης g ,είναι μετατόπιση της C_f στον y΄y κατά -1 και $h(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+\kappa}-x\right)$,$\kappa\in N^*$, βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} goh\ (x)$.

(μον.7)

4. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}+...+\sqrt{x^2+100}-100x\right)$ **(μον.6)**

ΘΕΜΑ 4^0

Α. Για μια συνάρτηση f που ορίζεται στο R ισχύει ότι

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\alpha^2}{x-1}=\alpha$, $\alpha\in R$. Να βρείτε το α αν

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2\cdot f(x)-\alpha^2}{x-1}\le 4+\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$$ **(μον.7)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{|x+z|^2-|z|^2}{|x-z|^2+|z|^2}$,

$x\in R,\quad z\in C$.

1. Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. **(μον.6)**

2. Να δείξετε ότι : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=\frac{Re(z)}{|z|^2}$ **(μον.6)**

3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο A(2,1) **(μον.6)**

ΘΕΜΑ 4^0 (Β)

Α. Έστω f συνεχής στο R με $f(3)=5$ και 2 και 6 δύο διαδοχικές της ρίζες . Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5 f(4)+(f(4)-6)x^2+3}{x^4-3f(4)\cdot x^2+2}.$$ **(μον.4)**

Β. Έστω f συνεχής στο R και τέτοια για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει :

$x\cdot f(x)-5x^4-x+2\eta\mu x^2=0$.

1. Να βρείτε τον τύπο της f .

2. Να βρείτε το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο R . **(Μον.9)**

Γ. Έστω η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\ 2,8\ $, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\ 2,8\ $. Η διανυσματική ακτίνα της εικόνας M(z) , όπου $z=\dfrac{f(2)\cdot f(4)}{8}+\dfrac{8}{f(8)}\cdot i$, σχηματίζει γωνία $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.

Να αποδείξετε ότι :

1. Ισχύει $f(2)\cdot f(4)\cdot f(8)=64$

2. Ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\ 2,8$

3. Υπάρχει $x_0\in\ 2,8\ $ τέτοιο , ώστε $f(x_0)=4$

3. Υπάρχει $x_1\in\ 2,8\ $ τέτοιο , ώστε $f(x_1)=x_1$

(Μον.12)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Θεωρία **Β.** Θεωρία

Γ. 1.**Λ** 2.**Λ** 3.**Λ** 4.**Σ** 5.**Λ** 6.**Λ** 7.**Σ** 8.**Σ** 9.**Σ** 10.**Λ**

ΘΕΜΑ 2^0

Α. 1. Από τους τύπους Vieta είναι $z_1+z_2=-\alpha$, $z_1\cdot z_2=\beta$

οπότε $W=\dfrac{-\alpha+2\beta i}{2\beta+\alpha i}=\dfrac{i(2\beta+\alpha i)}{2\beta+\alpha i}=i$, άρα w φανταστικός .

2. Αφού ο $z_1=\lambda\cdot(1+i)=\lambda+\lambda i$ είναι ρίζα της εξίσωσης , θα είναι και ο $z_2=\lambda-\lambda i$. Είναι :

i) $z_1\cdot z_2=\beta$ άρα $2\lambda^2=\beta>0$

ii) $z_1+z_2=-\alpha$ άρα $2\lambda=-\alpha\Rightarrow(2\lambda)^2=(-\alpha)^2\Rightarrow 4\lambda^2=\alpha^2\Rightarrow$

$2\cdot 2\lambda^2=\alpha^2\Rightarrow 2\beta=\alpha^2$

Β. 1. Έστω $\dfrac{z_1}{z_2}=w\in R$ άρα $z_1=w\cdot z_2\Rightarrow z_1^\nu=w^\nu\cdot z_2^\nu\overset{w^\nu=\rho}{\Rightarrow}$

$2+i=\rho\cdot(1+2i)\Leftrightarrow\rho=2$ και $2\rho=1\Leftrightarrow\rho=2$ και $\rho=\dfrac{1}{2}$,

άτοπο . Άρα ο $w=\dfrac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός .

2. Είναι : $w=\dfrac{z_1}{z_2}\Rightarrow w^\nu=\dfrac{z_1^\nu}{z_2^\nu}=\dfrac{2+i}{1+2i}\Rightarrow|w|^\nu=\dfrac{|2+i|}{|1+2i|}=1$

άρα $|w|=1$

3. Έχουμε : $\bar z=\overline{\left(\dfrac{w+1}{w-1}\right)}=\dfrac{\bar w+1}{\bar w-1}\overset{(2)}{=}\dfrac{\frac{1}{w}+1}{\frac{1}{w}-1}=-\dfrac{w+1}{w-1}=-z$

Αφού $\bar z=-z$, ο $z\in I$.

4. Είναι : $f(\alpha)=|\alpha+w|+|\alpha-w|=|\alpha+w|+|w-\alpha|\geq|\alpha+w+w-\alpha|=$

$=|2w|=2|w|=2$. Άρα $f_{min}=2$

ΘΕΜΑ 3^0

1. Έχουμε : $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}-1$ άρα $f^2(x)-2f(x)+1=e^{2x}>0$ και $\left(f(x)-1\right)^2=(e^x)^2>0$ οπότε η $f(x)-1$ δεν μηδενίζεται και έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ άρα $f(x)-1=e^x$ και $f(x)=e^x+1$.

2. Από την εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow e^x+1=y \overset{y>1}{\Leftrightarrow} e^x=y-1 \Leftrightarrow$ $\ln e^x=\ln(y-1) \Leftrightarrow x=\ln(y-1)$, μοναδική λύση ως προς x , $\forall y$. Η f λοιπόν είναι «1-1» επομένως αντιστρέφεται . Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A)=(1,+\infty)$ και τύπο $f^{-1}(x)=\ln(x-1)$

3. Είναι $g(x)=e^x$ με $A_g=R$. Επίσης $A_h=R$.Η goh ορίζεται για τα $x\in A_h$ και $h(x)\in A_g$ δηλ. $x\in R$ και $h(x)\in R$.Άρα $A_{goh}=R$ και

$$goh\ (x)=g(h(x))=e^{\ln(\sqrt{x^2+\kappa}-x)}=\sqrt{x^2+\kappa}-x$$. Ετσι :

$$\lim_{x\to+\infty} goh\ (x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa}{\sqrt{x^2+\kappa}+x}=\frac{\kappa}{+\infty}=0$$

4. Είναι : $A=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}-x)+....+\left(\sqrt{x^2+100}-x\right)$ και

σύμφωνα με το (3) είναι :

$$\lim_{x\to+\infty} A=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)+...+\left(\sqrt{x^2+100}-x\right)\right]=$$

$$=0+0+....+0=0$$

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

Α. Είναι : $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\dfrac{x-1\quad x+1}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{x+1}{x-3}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-3}=\frac{2}{-2}=-1$$

Θέτω $\dfrac{f(x)-\alpha^2}{x-1}=g(x)$ οπότε $f(x)=(x-1)\cdot g(x)+\alpha^2$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\cdot f(x)-\alpha^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\left[(x-1)g(x)+\alpha^2\right]-\alpha^2}{x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\left[x^2\cdot g(x)+(x+1)\alpha^2\right]=1^2\cdot\alpha+2\alpha^2=\alpha+2\alpha^2 .$$

Η προς επίλυση ανίσωση γράφεται :

$$2\alpha^2+\alpha\le 4-1\Leftrightarrow 2\alpha^2+\alpha-3\le 0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le\alpha\le 1 .$$

Β. 1.Έχουμε την $f(x)=\dfrac{|x+z|^2-|z|^2}{|x-z|^2+|z|^2}=\dfrac{x+z\ \ (x+\bar{z})-z\bar{z}}{x-z\ \ (x-\bar{z})+z\bar{z}}=$

$$=\frac{x^2+\ \ z+\bar{z}\ \ x+z\bar{z}-z\bar{z}}{x^2-(z+\bar{z})x+z\bar{z}+z\bar{z}}=\frac{x^2+2\mathrm{Re}(z)\cdot x}{x^2-2\mathrm{Re}(z)\cdot x+2|z|^2}$$. Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

2. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\mathrm{Re}(z)\cdot x}{\eta\mu x\ \ x^2-2\mathrm{Re}(z)\cdot x+2|z|^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2\mathrm{Re}(z)}{\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\ \ x^2-2\mathrm{Re}(z)\cdot x+2|z|^2}=\frac{2\mathrm{Re}(z)}{1\cdot 2|z|^2}=\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}.$$

3. Αφού η C_f διέρχεται από το σημείο Α(2,1) θα είναι f(2)=1

άρα $\dfrac{4+2\operatorname{Re}(z)\cdot 2}{4-2\operatorname{Re}(z)\cdot 2+2|z|^2}=1 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} \dfrac{2+2x}{2-2x+x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-2x+2=2+2x \Leftrightarrow x^2+y^2-4x=0 \Leftrightarrow$

$(x^2-4x+4)+y^2=4 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4$. Ο γ.τ των εικόνων

Μ(z) επομένως είναι κύκλος κέντρου Κ(2,0) και ακτίνας ρ=2.

ΘΕΜΑ 4^0 (Β)

Α. Αφού η f είναι συνεχής και οι αριθμοί 2 και 6 είναι διαδοχικές της ρίζες , στο διάστημα (2,6) η f διατηρεί πρόσημο . Όμως $3\in(2,6)$ και $f(3)=5>0$, άρα η f έχει θετικές τιμές στο (2,6) .Έτσι και

f(4)>0 .Είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\cdot f(4)+(f(4)-6)x^2+3}{x^4-3f(4)\cdot x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\cdot f(4)}{x^4}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot f(4)\right)=(+\infty)\cdot f(4)=+\infty$$

Β. 1. Από την ισότητα $x\cdot f(x)-5x^4-x+2\eta\mu x^2=0$ **(1)** προκύπτει :

$xf(x)=5x^4+x-2\eta\mu x^2$ και αν $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{5x^4+x-2\eta\mu x^2}{x}$

δηλ . $f(x)=5x^3+1-2\cdot\dfrac{\eta\mu x^2}{x}$ **(2)**

και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(5x^3+1-2\cdot\dfrac{\eta\mu x^2}{x^2}\cdot x\right)=0+1-2\cdot 0\cdot 0=1$

Επειδή η f είναι συνεχής θα είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

Έτσι ο τύπος της f είναι : $f(x)=\begin{cases}5x^3+1-2\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

2. Είναι : $-1 \le \eta\mu x^2 \le 1 \overset{:(x<0)}{\Rightarrow} \frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x^2}{x} \le -\frac{1}{x}$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, από το Κ.Π είναι και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x^2}{x} = 0$. Έτσι από (2):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(5x^3 + 1 - 2\frac{\eta\mu x^2}{x}\right) = -\infty + 1 - 2\cdot 0 = -\infty$$

3. Όμοια με το 2 ερώτημα , βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = R$ στο οποίο περιέχεται το 0. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Γ. 1. Αφού $\omega = \frac{\pi}{4}$ θα είναι $Re(z) = Im(z) > 0$ άρα

$$\frac{f(2)\cdot f(4)}{8} = \frac{8}{f(8)} \Leftrightarrow f(2)\cdot f(4)\cdot f(8) = 64 \quad \textbf{(1)}$$

2. Είναι f συνεχής , $f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in 2,8$ άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $2,8$. Απ΄ την (1) επομένως προκύπτει ότι $f(2)$, $f(4)$, $f(8) > 0$ άρα και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in 2,8$.

3. Έχουμε :
$$\left.\begin{array}{l} 2 = 2 < 8 \\ 2 < 4 < 8 \\ 2 < 8 = 8 \end{array}\right| \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} f(2) = f(2) < f(8) \\ f(2) < f(4) < f(8) \\ f(2) < f(8) = f(8) \end{array}\right| \overset{(\cdot)}{\Rightarrow}$$

$$f^3(2) < f(2)\cdot f(4)\cdot f(8) < f^3(8) \Rightarrow f^3(2) < 64 < f^3(8) \Rightarrow$$

$$f^3(2) < 4^3 < f^3(8) \Rightarrow f(2) < 4 < f(8)\,.$$

Σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ , υπάρχει $x_0 \in 2,8 : f(x_0) = 4$

4. Έστω δεν υπάρχει αριθμός στο $2,8$ ώστε να είναι

$f(x_1)=x_1$.Τότε θα είναι :

$f(x)<x$ ή $f(x)>x$ άρα

$f(2)<2$ ή $f(2)>2$

$f(4)<4$ ή $f(4)>4$

$f(8)<8$ ή $f(8)>8$ δηλ .

$f(2)\cdot f(4)\cdot f(8)<64$ ή $f(2)\cdot f(4)\cdot f(8)>64$ δηλ

$64<64$ ή $64>64$, ΑΤΟΠΟ!!!

Άρα υπάρχει $x_1 \in 2,8$ ώστε $f(x_1)=x_1$