ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

150

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**
Ύλη: Όλη η ύλη **Γεν. Παιδείας**
29-03-15

Θέμα 1ο :

Α. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας. **(6 μον.)**

Β. Πως ορίζεται η μέση τιμή ενός δείγματος με παρατηρήσεις $t_1, t_2, ..., t_\nu$; **(4 μον.)**

Γ. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Να αποδείξετε ότι $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Για την πιθανότητα του κενού συνόλου ισχύει: $P(\varnothing)=1$. **Σ Λ**

ii. Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι ένα μέτρο σχετικής διασποράς. **Σ Λ**

iii. Το ενδεχόμενο «Διαφορά του Β από το Α» πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β. **Σ Λ**

iv. Αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα. **Σ Λ**

v. Σε μία κανονική κατανομή το 0,3% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται εκτός του διαστήματος $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2ο:

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} xP(B)+\dfrac{x^2-P(A')x-P(A)}{x^3-1}, & \text{αν } x\neq 1 \\ \dfrac{1}{2}+P(B) & \text{, αν } x=1 \end{cases}.$$

Α. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να δείξετε ότι $P(A)=\dfrac{1}{2}$. **(9 μον.)**

Β. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = -1$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{2}{3}x - 5$, να αποδείξετε ότι $P(B) = \frac{1}{6}$. **(8 μον.)**

Γ. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. Γ: Να μην πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α, Β. **(4 μον.)**

ii. Δ: Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β. **(4 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ομαδοποιήθηκαν σε 5 ισοπλατείς κλάσεις με αντίστοιχη κατανομή συχνοτήτων Α(4,2α) , Β(8,3α) , Γ(12,10), Δ(16,3α), Ε(20,2α) . Εάν Ο(0,0) και Ζ(24,0), τότε το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο συχνοτήτων ΟΑΒΓΔΕΖ και τον οριζόντιο άξονα είναι 70 τ.μ.

i. Να αποδείξετε ότι α=6. **(3 μον.)**

ii. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων. **(4 μον.)**

iii. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων. **(4 μον.)**

iv. Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. **(3 μον.)**

Β. Έστω μία μεταβλητή Χ, η οποία μετράει σε cm το ύψος ενός δείγματος ν μαθητών Λυκείου μια πόλης και η οποία ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή. Αν το 97,5% των μαθητών του δείγματος έχουν ύψος μεγαλύτερο από 154cm και η διάμεσος της κατανομής είναι

$$\delta = 162 + \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 2|x| - 4}{x^2 - |x|}$$ τότε:

i. Να βρεθούν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του δείγματος. **(6 μον.)**

ii. Αν $\bar{x} = 168$, s=7 και το πλήθος των μαθητών με ύψος από 189cm και πάνω είναι 3 μαθητές να βρεθεί το μέγεθος ν του δείγματος. **(5 μον.)**

Θέμα 4[ο]:

Έστω $\Omega=\{0,1,2,\omega_1,\omega_2\}$ με $\omega_1<\omega_2$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενο $A=\{\omega_1,\omega_2\}$, ώστε να ισχύουν:
$P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(0)=2P(1)=\frac{P(2)}{2}=P(\omega_1)$.

Α. Να βρείτε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω. **(5 μον.)**

Β. Αν η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\frac{\alpha}{3}x^3-4x^2+15x-1$ έχει εφαπτομένη στο $x_0=1$ παράλληλη στην ευθεία ε:y=8x και τα $\omega_1,\ \omega_2$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της f, τότε να βρείτε τα α, $\omega_1,\ \omega_2$. **(6 μον.)**

Γ. Για α=1, $\omega_1=3,\ \omega_2=5$:

i. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$B=\left\{\lambda\in\Omega:\lim_{x\to2}\frac{f''(x)+4}{\sqrt{3x-2}-2}=\lambda^2-5\lambda+\frac{26}{3}\right\}.$$ **(6 μον.)**

ii. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου:
Γ: Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β. **(5 μον.)**

iii. Να δείξετε ότι $P(A-B)<\frac{1}{2}$. **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

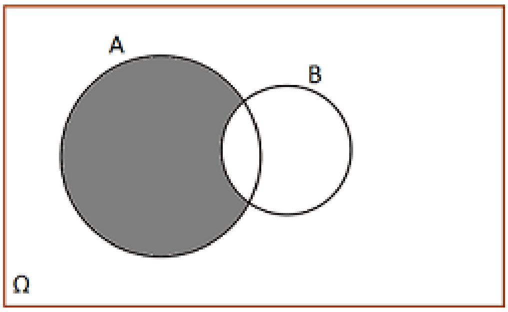
Α. Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,.....,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων .Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό , που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν :

- $0\le P(\omega_i)\le 1$
- $P(\omega_1)+P(\omega_2)+.....+P(\omega_\nu)=1$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.
Ως πιθανότητα P(A) ενός ενδεχομένου $A=\{\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}\neq\varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+....+P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing)=0$.

Β. Η μέση τιμή ενός δείγματος με παρατηρήσεις $t_1,t_2,...,t_\nu$ ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή: $\bar{x}=\dfrac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}$.

Γ. Επειδή τα Α-Β και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$ έχουμε: $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$.
Άρα: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.



Δ . **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.** Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$, πρέπει $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[xP(B) + \frac{x^2 - P(A')x - P(A)}{x^3 - 1}\right] =$$

$$\lim_{x\to 1} xP(B) + \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - (1 - P(A))x - P(A)}{x^3 - 1} =$$

$$P(B) + \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - x + P(A)x - P(A)}{x^3 - 1} = P(B) + \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1) + P(A)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$P(B) + \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+P(A))}{(x-1)(x^2+x+1)} = P(B) + \lim_{x\to 1}\frac{(x+P(A))}{(x^2+x+1)} =$$

$$P(B) + \frac{1+P(A)}{3}.$$

Οπότε: $P(B) + \dfrac{1+P(A)}{3} = f(1) \Leftrightarrow P(B) + \dfrac{1+P(A)}{3} = \dfrac{1}{2} + P(B) \Leftrightarrow$

$$2 + 2P(A) = 3 \Leftrightarrow 2P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}.$$

Β. Για $P(A) = \dfrac{1}{2}$ είναι $P(A') = 1 - P(A) = \dfrac{1}{2}$ και τότε η f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} xP(B) + \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^3 - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} + P(B) & \text{, αν } x=1 \end{cases} = \begin{cases} xP(B) + \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x^3 - 2}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} + P(B) & \text{, αν } x=1 \end{cases}$$

Εφόσον η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = -1$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \dfrac{2}{3}x - 5$ θα είναι: $f'(-1) = \dfrac{2}{3}$.**(1)**

Η f για $x \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\left[xP(B)+\frac{2x^2-x-1}{2x^3-2}\right]'=$$

$$P(B)+\frac{(4x-1)(2x^3-2)-(2x^2-x-1)(6x^2)}{(2x^3-2)^2}=$$

$$P(B)+\frac{-4x^4+4x^3+6x^2-8x+2}{(2x^3-2)^2}$$

Οπότε από την **(1)** έχουμε:

$$f'(-1)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow P(B)+\frac{-4-4+6+8+2}{(-2-2)^2}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$P(B)+\frac{8}{16}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow P(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{6}.$$

Γ. i. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ είναι:

$$P(\Gamma)=P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=$$

$$1-P(A)-P(B)+P(A\cup B)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

ii. Για τη πιθανότητα του ενδεχομένου Δ έχουμε:

$$P(\Delta)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]\underset{\text{ασυμβίβαστα}}{\overset{A-B,B-A}{=}}P(A-B)+P(B-A)=$$

$$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

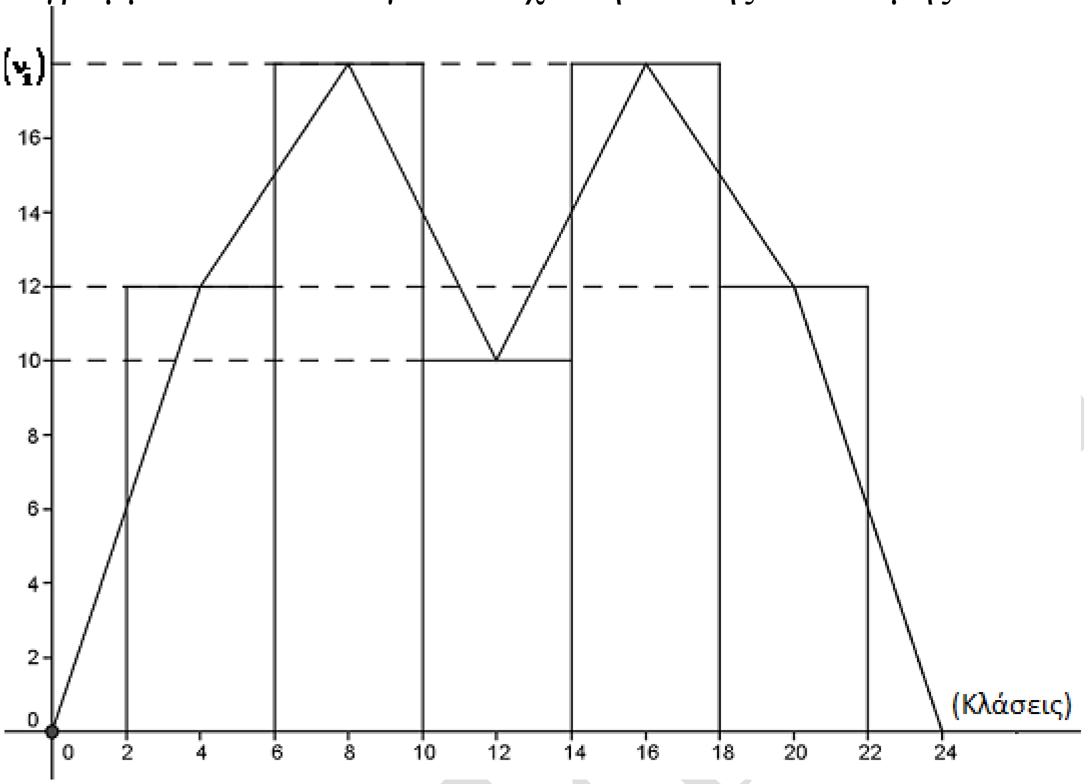
Θέμα 3^o:

A.i. Εφόσον το πολύγωνο συχνοτήτων σχηματίζει εμβαδό 70 τ.μ. με τον οριζόντιο άξονα θα είναι:

$$E=70\Leftrightarrow \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=70\Leftrightarrow$$

$$2\alpha+3\alpha+10+3\alpha+2\alpha=70\Leftrightarrow 10\alpha=60\Leftrightarrow \alpha=6.$$

ii. Το πολύγωνο συχνοτήτων σχηματίζεται από τα σημεία O(0,0) A(4,12), B(8,18), Γ(12,10), Δ(16,18), E(20,12) και Z(24,0). Η τετμημένη καθενός από τα σημεία A, B, Γ, Δ, E είναι το κέντρο της άνω βάσης του ορθογωνίου, ενώ η τεταγμένη των αντίστοιχων σημείων είναι η συχνότητα της κάθε κλάσης. Οι τετμημένες των σημείων Ο και Ζ είναι τα κέντρα δύο ψευτοκλάσεων. Έτσι το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής είναι:



iii. Ο πίνακας συχνοτήτων της κατανομής είναι:

Κλάσεις	x_i	ν_i	$\nu_i x_i$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
$[2,6)$	4	12	48	64	768
$[6,10)$	8	18	144	16	288
$[10,14)$	12	10	120	0	0
$[14,18)$	16	18	288	16	288
$[18,22)$	20	12	240	64	768
Σύνολο	-	70	840	-	2112

iv. Η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{840}{70}=12$.

Η διακύμανση: $s^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 v_i}{v}=\dfrac{2112}{70}\approx 30{,}17$ και η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{30{,}17}$. Τότε ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{\sqrt{30{,}17}}{12}$. Έστω ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Τότε:

$$CV\le 10\%\Leftrightarrow CV^2\le\frac{1}{100}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{30{,}17}}{12}\right)^2\le\frac{1}{100}\Leftrightarrow\frac{30{,}14}{144}\le\frac{1}{100}\Leftrightarrow$$

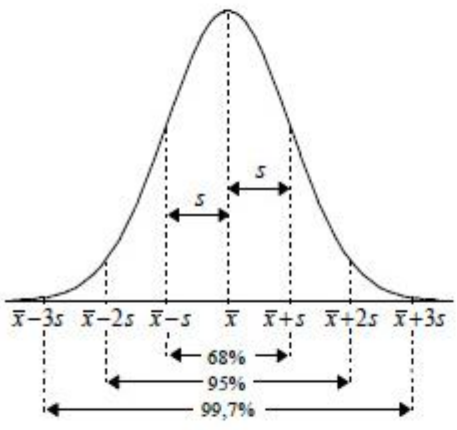
$3014\le 144$ άτοπο.
Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β. i. Η μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή, επομένως η μέση τιμή θα ισούται με τη διάμεσο. Για τη διάμεσο έχουμε:

$$\delta=162+\lim_{x\to-1}\frac{2|x|^2+2|x|-4}{|x|^2-|x|}=162+\lim_{x\to-1}\frac{2(|x|-1)(|x|+2)}{|x|(|x|-1)}=$$

$$162+\lim_{x\to-1}\frac{2(|x|+2)}{|x|}=162+6=168.$$

Επομένως η μέση τιμή είναι **168**.



Το $97{,}5\%=95\%+\dfrac{100-95}{2}\%$ των μαθητών έχουν ύψος μεγαλύτερο από $154cm$. Οπότε: $\bar{x}-2s=154\Leftrightarrow 168-2s=154\Leftrightarrow$ **s=7** .

ii. Το ποσοστό των μαθητών που έχουν ύψος πάνω από 189cm είναι $\dfrac{100-99{,}7}{2}\%=0{,}15\%$. Άρα $0{,}15\%\nu=3\Leftrightarrow\nu=300:0{,}15\Leftrightarrow$
ν=2000.

Θέμα 4ο:

A. Είναι $P(A)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(\omega_1)+P(\omega_2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(\omega_1)=\frac{1}{2}-P(\omega_2)$.

Επίσης, $P(0)=2P(1)=\frac{P(2)}{2}=P(\omega_1)$ άρα $P(0)=P(\omega_1)$,

$P(1)=\frac{P(\omega_1)}{2}$ και $P(2)=2P(\omega_1)$. Οπότε:

$P(0)+P(1)+P(2)+P(\omega_1)+P(\omega_2)=1\Leftrightarrow$

$P(\omega_1)+\frac{P(\omega_1)}{2}+2P(\omega_1)+P(\omega_1)+\frac{1}{2}-P(\omega_1)=1\Leftrightarrow$

$2P(\omega_1)+P(\omega_1)+4P(\omega_1)+2P(\omega_1)-2P(\omega_1)=1\Leftrightarrow$

$7P(\omega_1)=1\Leftrightarrow P(\omega_1)=\frac{1}{7}$.

Τότε: $P(0)=\frac{1}{7}$, $P(1)=\frac{1}{14}$, $P(2)=\frac{2}{7}$ και $P(\omega_2)=\frac{5}{14}$.

B. Εφόσον η καμπύλη της $f(x)=\frac{\alpha}{3}x^3-4x^2+15x-1$ έχει εφαπτομένη, στο $x_0=1$ παράλληλη στην ευθεία ε: y=8x , θα είναι $\lambda_\varepsilon=f'(1)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$f'(x)=\left(\frac{\alpha}{3}x^3-4x^2+15x-1\right)'=\alpha x^2-8x+15$. Πρέπει λοιπόν,

$f'(1)=8\Leftrightarrow \alpha-8+15=8\Leftrightarrow$ **α=1**. Για τα ακρότατα της f θα λύσουμε

την ανίσωση: $f'(x)\ge 0\overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow}\underbrace{x^2-8x+15}_{\text{ρίζες 3 και 5}}\ge 0\overset{\text{ομ.του α}}{\Leftrightarrow} x\le 3$ ή $x\ge 5$.

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	-∞	3	5	+ ∞
f '	+	-	+	
f	↗	↘	↗	
		T.M.	T.E.	

Εφόσον τα ω_1,ω_2 είναι οι θέσεις των ακρότατων της f με $\omega_1<\omega_2$ θα είναι $\omega_1=3$ και $\omega_2=5$.

Γ. Για α=1, $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = 5$ έχουμε: $f'(x) = x^2 - 8x + 15$.

i. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x) = \left(x^2 - 8x + 15\right)' = 2x - 8$. Τότε για το ενδεχόμενο Β θα υπολογίσουμε το παρακάτω όριο.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f''(x)+4}{\sqrt{3x-2}-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-8+4}{\sqrt{3x-2}-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3} = \frac{8}{3}.$$

Επομένως, πρέπει $\lambda^2 - 5\lambda + \frac{26}{3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + \frac{18}{3} = 0 \Leftrightarrow$ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = 3$. Και εφόσον $2 \in \Omega$ και $3 \in \Omega$ θα είναι $B = \{2,3\}$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β είναι:

$$P(B) = P(2) + P(3) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}.$$

ii. Είναι $P(\Gamma) = P\left[(A \cup B)'\right]$ **(1)**.

Εφόσον $B = \{2,3\}$ και $A = \{3,5\}$ θα είναι $A \cup B = \{2,3,5\}$ και $(A \cup B)' = \{0,1\}$. Οπότε η (1) θα γίνει:

$$P(\Gamma) = P\left[(A \cup B)'\right] = P(0) + P(1) = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}.$$

iii. Τέλος, $A - B = \{5\}$, οπότε $P(A - B) = P(5) = \frac{5}{14} < \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.