ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **149**

Υλη:Όλη **Γ΄ Λυκείου**

Ον/μο:……………….. **24-03-13**

Θετ-Τεχν.

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$. **(μον.8)**

Β. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος . **(μον.6)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. Ο αριθμός $w = z^{10} - z^5 - (\bar{z})^{10} + (\bar{z})^5 - i$ είναι πραγματικός. **Σ Λ**

2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα υποσύνολα A_1 και A_2 του πεδίου ορισμού της , τότε είναι γνησίως αύξουσα και στο $A_1 \cup A_2$. **Σ Λ**

3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη , δεν είναι αντιστρέψιμη . **Σ Λ**

4. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right) = 1$. **Σ Λ**

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ **Σ Λ**

6. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και η f+g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ **, τότε η g δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ **.** **Σ Λ**

7. Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f ΄υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f . **Σ Λ**

8. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε x που ανήκει σ΄ ένα διάστημα Δ, τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο Δ. **Σ Λ**

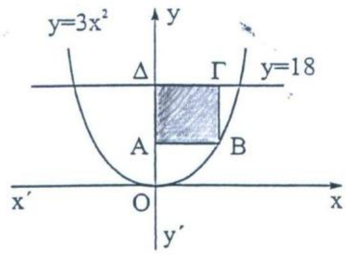
9. Αν τα σημεία Α(-1,0) και Β(1,1) ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τότε $\int_{-1}^{1}\dfrac{f'(x)}{1+f(x)}dx = 2\ln 2$. **Σ Λ**

10. Αν η $f : R \to R$ είναι περιττή και συνεχής τότε $\int_{-2}^{2}\left[f(x) + 3x^2 - 2\right]dx = 8$ **Σ Λ**

(μον.5)

Δ. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ στο διπλανό σχήμα είναι ίση με :

α. $12\sqrt{2}$ **β.** 24 **γ.** $36\sqrt{2}$ **δ.** 40 **ε.** 48



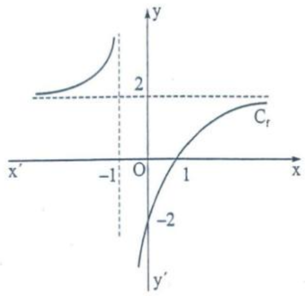
(μον.3)

Ε. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}$.

Το άθροισμα α+β+γ ισούται με :

α .-2 **β.** -1 **γ.** 0 **δ.** 1 **ε.** 2



(μον.3)

ΘΕΜΑ 2^0

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **(μον.3)**

2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η αντιστροφή της είναι η $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. **(μον.6)**

3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=0$ **(μον.4)**

4. Να δείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τις x=-2 , x=2 και την οριζόντια ασύμπτωτή της στο -∞ είναι Ε=2 . **(μον.6)**

5. Αν z,w είναι μιγαδικοί τέτοιοι ώστε

$f^{-1}(\ln 1)+f^{-1}(\ln|z+\overline{w}|)=\dfrac{7}{6}$ να αποδείξετε ότι :

α) $|z+\overline{w}|=|\overline{z}+w|=2$ **(μον.3)**

β) $|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)|\le 2$ **(μον.3)**

ΘΕΜΑ 3^0

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις :

i) $f(2)=2$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu 3x}=3$ και **iii)** $f''(x)\neq 0,\quad \forall x\in(0,2)$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ **(μον.4)**

2. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=9$ **(μον.4)**

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(0,f(0)) **(μον.3)**

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (0,2) . **(μον.4)**

5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ ώστε $f(\xi)=2-\xi$ **(μον.4)**

6. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ έτσι ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$ **(μον.6)**

ΘΕΜΑ 4^0

Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής , $f(0)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$. Ακόμα ισχύει ότι

$f'(x)\cdot\int_0^x f(t)dt+f^2(x)=12x$, για κάθε x>0

1. Να αποδείξετε ότι $f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt=6x^2$ **(μον.5)**

2. Να αποδείξετε ότι $\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2=4x^3$ **(μον.5)**

3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=3\sqrt{x},\quad x\geq 0$ **(μον.5)**

4. Αν $g(x)=f(x)+\ln x$ **,** να αποδείξτε ότι η C_g τέμνει τον x΄x σ΄ ένα ακριβώς σημείο . **(μον.5)**

5. Αν $0<\alpha<\beta$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ και $\ln\sqrt[3]{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Θεωρία **Β.** Θεωρία

Γ. 1.**Λ** 2.**Λ** 3.**Λ** 4.**Λ** 5.**Σ** 6.**Σ** 7.**Λ** 8.**Λ** 9.**Λ** 10.**Σ**

Δ. α **Ε. δ**

ΘΕΜΑ 2^0

1. Πρέπει $\frac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<1$ άρα $A=(0,1)$.

2. Η εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x} \Leftrightarrow$

$$e^y - xe^y = x \Leftrightarrow xe^y + x = e^y \Leftrightarrow x(e^y+1)=e^y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}.$$

Η λύση αυτή είναι , $\forall y$, μοναδική οπότε η f είναι “1-1” .

Πρέπει $0<\frac{e^y}{1+e^y}<1$ που ισχύει άρα $f(A)=\mathbb{R}$. Η f λοιπόν αντιστρέφεται και η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A)=\mathbb{R}$ και τύπο

$$f^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

3. ● $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{LH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=\mathbf{1}$

● $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=\mathbf{0}$

4. Η οριζόντια ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ στο $-\infty$, σύμφωνα με το ερώτημα **3** είναι η y=0 δηλ. ο x΄x . Το ζητούμενο λοιπόν εμβαδό είναι :

$$E=\int_{-2}^{2}\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|dx=\int_{-2}^{2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[\ln(e^x+1)\right]_{-2}^{2}=\ln(e^2+1)-\ln(e^{-2}+1)=$$

$$=\ln\frac{e^2+1}{e^{-2}+1}=\ln\frac{e^2+1}{\frac{1}{e^2}+1}=\ln\frac{e^2+1}{\frac{e^2+1}{e^2}}=\ln e^2=\mathbf{2}$$

5.α) Έχουμε :

$$f^{-1}(\ln 1)+f^{-1}(\ln|z+\overline{w}|)=\frac{7}{6}\Leftrightarrow f^{-1}(0)+f^{-1}(\ln|z+\overline{w}|=\frac{7}{6}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}+\frac{e^{\ln|z+\overline{w}|}}{e^{\ln|z+\overline{w}|}+1}=\frac{7}{6}\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{|z+\overline{w}|}{|z+\overline{w}|+1}=\frac{7}{6}\Leftrightarrow \frac{|z+\overline{w}|}{|z+\overline{w}|+1}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$3|z+\overline{w}|=2|z+\overline{w}|+2\Leftrightarrow|z+\overline{w}|=2$$

Επίσης $|z+\overline{w}|=|\overline{z+\overline{w}}|=|\overline{z}+w|$ άρα $|z+\overline{w}|=|\overline{z}+w|=2$

β) Έχουμε : $|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)|=\left|\frac{z+\overline{z}}{2}+\frac{w+\overline{w}}{2}\right|=$

$$=\left|\frac{z+\overline{w}}{2}+\frac{\overline{z}+w}{2}\right|\le\left|\frac{z+\overline{w}}{2}\right|+\left|\frac{\overline{z}+w}{2}\right|=\frac{|z+\overline{w}|}{2}+\frac{|\overline{z}+w|}{2}=$$

$=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}=1$.Πράγματι $|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)|\le 2$

<u>ΘΕΜΑ 3^0</u>

1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη , είναι και συνεχής .

Έτσι : $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}\cdot\eta\mu 3x\right]=3\cdot 0=0$

άρα $f(0)=0$.

2. Είναι : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}\cdot\frac{\eta\mu 3x}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}\cdot\frac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\right)=3\cdot 1\cdot 3=9$.Άρα $f(0)=9$

3. Είναι : $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)$ δηλ $y-0=9\cdot x$ άρα $\varepsilon: y=9x$

4. Έστω ότι η f ΄ έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (0,2) , τις x_1 , x_2 με $x_1<x_2$. Τότε , και σύμφωνα με το θ.Rolle για την f ΄ , θα υπήρχε $x_0\in(x_1,x_2): f''(x_0)=0$, άτοπο γιατί $f''(x)\ne 0$ στο (0,2) .Δεν μπορεί λοιπόν η f΄ να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (0,2).

5. Θέλω να δείξω ότι το ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)+x-2=0$.
Θεωρώ την $g(x)=f(x)+x-2$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$
και $g(0)=f(0)-2=-2$, $g(2)=f(2)=2$ δηλ $g(0)\cdot g(2)<0$.
Σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,2):g(\xi)=0$ δηλ.
$f(\xi)=2-\xi$.

6. ● Η f είναι συνεχής στα $[0,\xi]$, $[\xi,2]$
● Η f είναι παραγωγίσιμη στα (0, ξ) , (ξ, 2)
Σύμφωνα λοιπόν με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $x_1\in(0,\xi), x_2\in(\xi,2)$
ώστε : $f'(x_1)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(\xi)}{2-\xi}=$
$=\dfrac{2-f(\xi)}{2-\xi}\overset{(5)}{=}\dfrac{\xi}{f(\xi)}$ οπότε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{f(\xi)}$
δηλ $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$

ΘΕΜΑ 4^0

1. Έχουμε **:** $f'(x)\cdot\int_0^x f(t)dt+f^2(x)=12x$ **(1)** $\Leftrightarrow$

$$f'(x)\cdot\int_0^x f(t)dt+f(x)\cdot\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=12x\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt\right)'=(6x^2)'\Leftrightarrow f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt=6x^2+c_1 \quad \textbf{(2)}$$

Η (1) για x=0 ⇒ f(0)=0
Η (2) για x=0 ⇒ $c_1=0$
$\Rightarrow f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt=6x^2$ **(3)**

2. Η (3)⇒ $\left(\int_0^x f(t)dt\right)'\cdot\int_0^x f(t)dt=6x^2\Leftrightarrow 2\left(\int_0^x f(t)dt\right)'\cdot\int_0^x f(t)dt=12x^2$

$$\Leftrightarrow\left[\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\right]'=(4x^3)'\Leftrightarrow\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2=4x^3+c_2 \quad \textbf{(4)}$$

Η (4) για x=0 δίνει $c_2=0$ άρα $\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2=4x^3$ **(5)**

3. Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$, επειδή f(x)>0, δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής. Αρα διατηρεί πρόσημο.

Από την (5)$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt = \sqrt{4x^3}$ ή $\int_0^x f(t)dt = -\sqrt{4x^3}$.

Επειδή $f(x) > 0$, για κάθε x>0 , είναι και $\int_0^x f(t)dt > 0$

άρα δεκτή λύση είναι η $\int_0^x f(t)dt = \sqrt{4x^3} \Rightarrow$

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = \left(\sqrt{4x^3}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{(4x^3)'}{2\sqrt{4x^3}} = \frac{12x^2}{2\cdot 2x\sqrt{x}} = \frac{3x}{\sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}}{x}$$

άρα $f(x) = 3\sqrt{x},\quad x \geq 0$ γιατί $f(0) = 0$.(επαληθεύω στην (5)...)

4. Η $g(x) = f(x) + \ln x = 3\sqrt{x} + \ln x,\quad x > 0$, έχει $g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} > 0$,

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε η g έχει το πού μία ρίζα και επομένως η C_g τέμνει τον x΄x το πολύ σ΄ ένα σημείο.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(3\sqrt{x} + \ln x) = 0 + (-\infty)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x} + \ln x\right) = +\infty$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο A=(0,+∞) έχει σύνολο τιμών το $g(A) = \mathbb{R}$, στο οποίο περιέχεται το 0 , άρα η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα , η οποία λόγω της μονοτονίας της g είναι μοναδική .

Η C_g λοιπόν τέμνει τον x΄x σ΄ ένα ακριβώς σημείο .

5. Έχουμε : $0 < \alpha < \beta \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow 3\sqrt{\alpha} + \ln\alpha < 3\sqrt{\beta} + \ln\beta \Leftrightarrow$

$$3\sqrt{\alpha} - 3\sqrt{\beta} < \ln\beta - \ln\alpha \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} < \frac{1}{3}\ln\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \quad \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} < \ln\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}$$