ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

148

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός-Στατιστική **Γεν. Παιδείας**

25-01-15

<u>Θέμα 1ο :</u>

Α. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Β. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Γ. Πως ορίζεται η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων; **(4 μον.)**

Δ. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X , ενός δείγματος ν παρατηρήσεων με $\kappa \leq \nu$.

i. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα της τιμής x_i;

ii. Να αποδείξετε ότι: $0 \leq f_i \leq 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., \kappa$.

iii. Να αποδείξετε ότι: $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$.

(3x2=6μον.)

Ε. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε $f(2014) < f(2015)$. **Σ Λ**

ii. Η ομάδα αίματος είναι ποιοτική και συνεχής μεταβλητή. **Σ Λ**

iii. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση τόσο ποιοτικών, όσο και ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. **Σ Λ**

iv. Κεντρική τιμή μιας κλάσης είναι η ημιδιαφορά των δύο άκρων της. **Σ Λ**

v. Ισχύει ότι $f''(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$, $h \neq 0$. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

Θέμα 2^{o}:

Στην πόλη Τρίκαλα οι ελάχιστες θερμοκρασίες 25 ημερών τον Ιανουάριο είχαν ως εξής:

* Όλες τις ημέρες οι θερμοκρασίες ήταν $-2^{\circ}C$ ή $-1^{\circ}C$ ή $0^{\circ}C$ ή $1^{\circ}C$ ή $2^{\circ}C$.
* 10 ημέρες η θερμοκρασία ήταν το πολύ $-1^{\circ}C$.
* 12 ημέρες η θερμοκρασία ήταν $0^{\circ}C$ ή $1^{\circ}C$.
* Το 60% των ημερών είχε θερμοκρασία το πολύ $0^{\circ}C$.
* Οι ημέρες που είχαν θερμοκρασία $-1^{\circ}C$ είναι κατά 2 περισσότερες από τις ημέρες που είχαν θερμοκρασία $-2^{\circ}C$.

Α. Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων ($v_i, f_i, f_i\%, F_i, F_i\%, N_i$) για τα παραπάνω δεδομένα. **(6 μον.)**

Β.i. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

ii. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων. **(2x4=8 μον.)**

Γ. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των θερμοκρασιών των παραπάνω ημερών. **(6 μον.)**

Δ. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **(5 μον.)**

Θέμα 3^{o}:

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής Χ των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες ευρώ), ενός δείγματος εργαζομένων, ομαδοποιημένης σε κλάσεις ίσου πλάτος, έχει κορυφές τα σημεία:

Α(20,0), $B\left(40, 1+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}\right)$, Γ(60,ω) όπου ω είναι ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^3-2x+\ln 1$ στο σημείο $(2, f(2))$, Δ(80,20), Ε(100,30), $Z(120, v_5)$, Η(140,10), και Θ(160,0). Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση x=100 διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Α. Να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων Β και Γ. **(4 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι $v_5 = 25$. **(5 μον.)**

Γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων. **(4 μον.)**

Δ. Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της κατανομής. **(6 μον.)**

Ε. Αν σαν «όριο φτώχειας» θεωρήσουμε το μισθό των 7.200€, να εκτιμήσετε το ποσοστό επί τοις % των φτωχών του δείγματος. **(6 μον.)**

Θέμα 4ο:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2\ln t-(t\ln t+t)x+t^2}{x-t}$, t>0.

Α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to t} f(x)=t\ln t-t$. **(5 μον.)**

Β. Ορίζουμε τη συνάρτηση g με $g(t)=-\lim\limits_{x\to t} f(x)+\dfrac{1}{t}$, t>0.

Να βρεθεί σημείο της C_g στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι μέγιστη. **(8 μον.)**

Γ. Έστω $(x_{i,}y_i)$ σημεία της ευθείας (ε):y=-x+3 με i=1,2,3,…,κ.

i. Αν οι τετμημένες των σημείων αυτών έχουν μέση τιμή 9 και τυπική απόκλιση 1, να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των τεταγμένων τους. **(3 μον.)**

ii. Να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων και να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **(4 μον.)**

iii. Να βρεθεί η ελάχιστη θετική σταθερά c που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση y_i, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^{o}:

Α. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Β. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , αν το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός .

Γ. Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός και ως το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός.

Δ. i. Σχετική συχνότητα της τιμής , ονομάζουμε το πηλίκο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$.

ii. Για i=1,2,....,κ έχουμε :

$$0 \le v_i \le \nu \Leftrightarrow 0 \le \frac{v_i}{v} \le \frac{v}{v} = 1$$. Συνεπώς $0 \le f_i \le 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., \kappa$.

iii. Ισχύει $f_1 + f_2 + ... + f_k = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{v_1 + v_2 + ... + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1$.

Ε . i. Σ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Σ

Θέμα 2^{o}:

Α.

x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$	$x_i \cdot v_i$	$x_i^2 \cdot v_i$
-2	4	4	0,16	16	0,16	16	-8	16
-1	6	10	0,24	24	0,4	40	-6	6
0	5	15	0,2	20	0,6	60	0	0
1	7	22	0,28	28	0,88	88	7	7
2	3	25	0,12	12	1	100	6	12
Σύνολο	**25**	**-**	**1**	**100**	**-**	**-**	**-1**	**41**

Είναι ν=25.

* 10 ημέρες η θερμοκρασία ήταν το πολύ $-1^{\circ}C$. Άρα $\nu_1+\nu_2=10$ **(1)**.
Οπότε $\nu_3+\nu_4+\nu_5=25-10=15$ **(2)**.

* 12 ημέρες η θερμοκρασία ήταν $0^{\circ}C$ ή $1^{\circ}C$. Άρα $\nu_3+\nu_4=12$ **(3)**.
Από τη **(2)** προκύπτει ότι $\nu_3+\nu_4+\nu_5=15 \Rightarrow \nu_5=15-12 \Rightarrow \nu_5=3$.

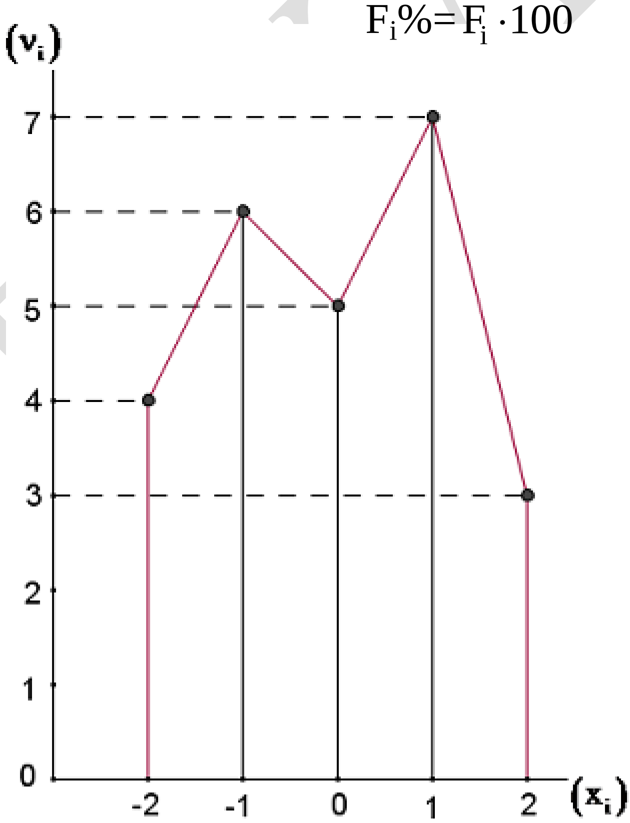
* Το 60% των ημερών είχε θερμοκρασία το πολύ $0^{\circ}C$.
$\frac{60}{100}\cdot 25=\frac{1500}{100}=15$ ημέρες είχαν θερμοκρασία το πολύ $0^{\circ}C$, δηλαδή
$\nu_1+\nu_2+\nu_3=15 \overset{(1)}{\Rightarrow} \nu_3=15-10=5$.

* Οι ημέρες που είχαν θερμοκρασία $-1^{\circ}C$ είναι κατά 2 περισσότερες από τις ημέρες που είχαν θερμοκρασία $-2^{\circ}C$.
Οπότε $\nu_2=\nu_1+2$. Άρα από την (1) έχουμε: $\nu_1+\nu_2=10 \Leftrightarrow$
$\nu_1+\nu_1+2=10 \Leftrightarrow 2\nu_1=8 \Leftrightarrow \nu_1=4$ και $\nu_2=6$.
Επομένως, $\nu_4=\nu-(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)=25-18=7$.

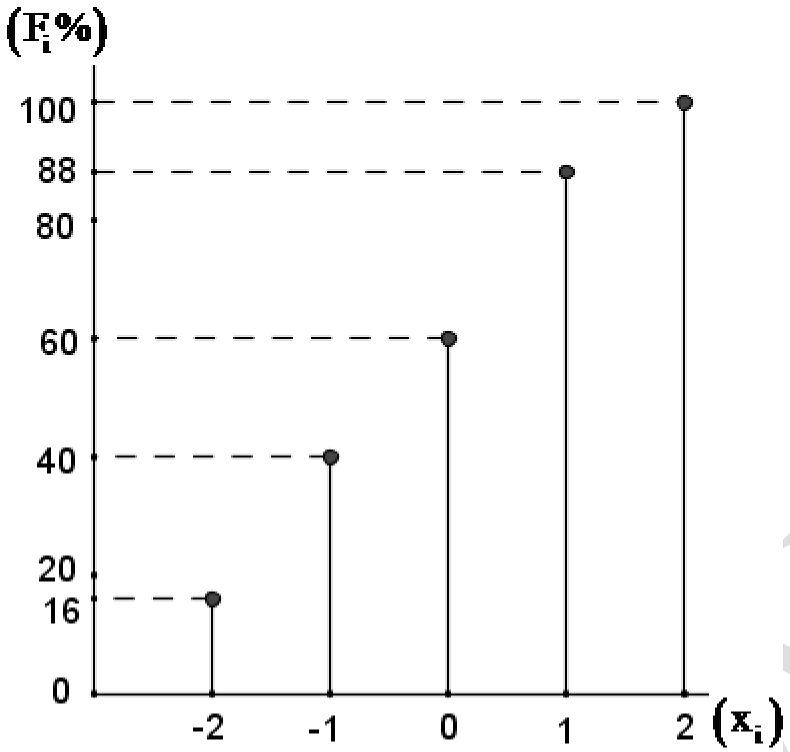
Τέλος, για τις σχετικές συχνότητες έχουμε : $f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$, $f_i\%=f_i\cdot 100$

και για τις αθροιστικές : $N_1=\nu_1$, $N_2=N_1+\nu_2$,....
$F_1=f_1$, $F_2=F_1+f_2$,....
$F_i\%=F_i\cdot 100$

B. i.



ii.



Γ. Για τη μέση τιμή έχουμε: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} = -\dfrac{1}{25}$.

Για τη διάμεσο, εφόσον ν=25(περιττός) θα είναι η μεσαία παρατήρηση δηλαδή δ=13$^{\eta}$ παρατήρηση=0.

Δ. Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{1}{25}\left\{41 - \frac{1}{25}\right\} = \frac{1024}{625}.$$

Οπότε η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{\dfrac{1024}{625}}$. Τότε ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1024}{625}}}{\dfrac{1}{25}} = \dfrac{25\sqrt{1024}}{\sqrt{625}}$.

Έστω ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Τότε πρέπει:

$$CV \le 10\% \Leftrightarrow CV^2 \le \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{25\sqrt{1024}}{\sqrt{625}}\right)^2 \le \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\frac{625 \cdot 1024}{625} \le \frac{1}{100} \Leftrightarrow 1024 \le \frac{1}{100}.\text{Άτοπο.}$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Θέμα 3ο:

Α. Για το σημείο Β έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to1}(x+1)\left(x^2+1\right) = 4.$$

Οπότε εφόσον 1+4=5 έχουμε ότι το σημείο Β είναι το Β(40,5).

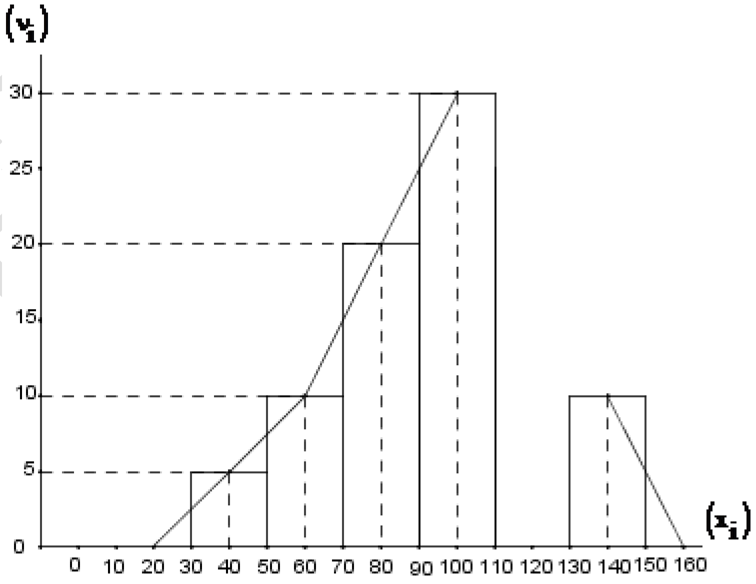
Για το σημείο Γ είναι:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της C_f στο $(2, f(2))$ είναι $f'(2)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = \left(x^3 - 2x + \ln 1\right)' =$

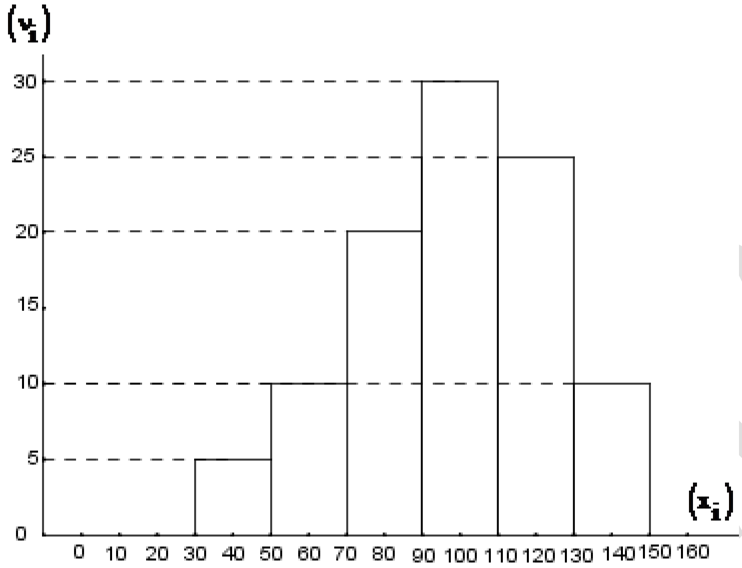
$= 3x^2 - 2$. Οπότε $f'(2) = 10$ δηλαδή το σημείο Γ είναι το Γ(60,10).

Β. Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης το πολύγωνο συχνοτήτων είναι:



Εφόσον η x=100 διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία, θα είναι: $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\frac{\nu_4}{2}=\frac{\nu_4}{2}+\nu_5+\nu_6 \Leftrightarrow 5+10+20=\nu_5+10 \Leftrightarrow$ $\nu_5=25$.

Γ. Το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής είναι:



Δ. Κατασκευάζουμε τον πίνακα της κατανομής:

Κλάσεις	x_i	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
$[30,50)$	40	5	5	5	200
$[50,70)$	60	10	10	15	600
$[70,90)$	80	20	20	35	1600
$[90,110)$	100	30	30	65	3000
$[110,130)$	120	25	25	90	3000
$[130,150)$	140	10	10	100	1400
Σύνολο	-	100	100	-	9800

Όπου, για τις σχετικές συχνότητες έχουμε : $f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$, $f_i\%=f_i\cdot 100$

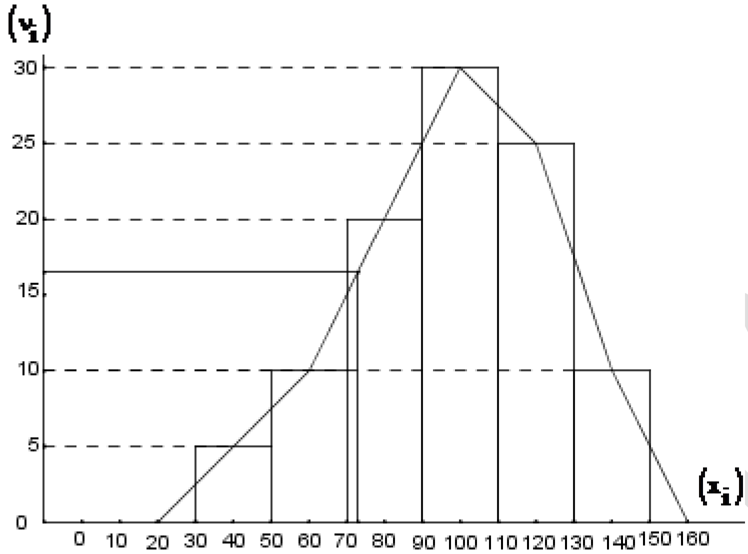
και για τις αθροιστικές : $F_1=f_1$, $F_2=F_1+f_2$,....

$F_i\%=F_i\cdot 100$

Τότε για τη μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i \nu_i}{\nu} = \dfrac{9800}{100} = 98$.

Για τη διάμεσο εφόσον η κατακόρυφη x=100 διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία, θα είναι δ=100.

Ε.



Από το πολύγωνο συχνοτήτων παρατηρούμε ότι αυτοί που έχουν μισθό κάτω από 7.200€ είναι: $\nu_1 + \nu_2 + \dfrac{72-70}{20}\nu_3 = 5 + 10 + \dfrac{2}{20}20 = 17$ άτομα.

Το ποσοστό αυτών είναι $\dfrac{17}{100} = 17\%$.

<u>Θέμα 4°:</u>

Α. Έχουμε την $f(x) = \dfrac{x^2 \ln t - (t\ln t + t)x + t^2}{x-t}$, t>0.

$$\lim_{x\to t} f(x) = \lim_{x\to t} \frac{x^2 \ln t - (t\ln t + t)x + t^2}{x-t} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to t} \frac{x^2 \ln t - t\ln t x - tx + t^2}{x-t}$$

$$= \lim_{x\to t} \frac{x\ln t(x-t) - t(x-t)}{x-t} = \lim_{x\to t} \frac{(x-t)(x\ln t - t)}{x-t} = t\ln t - t.$$

Β. Είναι $g(t)=-\lim\limits_{x\to t} f(x)+\frac{1}{t}=-t\ln t+t+\frac{1}{t}, t>0.$

Η κλίση της εφαπτομένης της C_g είναι η g'. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$g'(t)=\left(-t\ln t+t+\frac{1}{t}\right)'=-\ln t-1+1-\frac{1}{t^2}=-\ln t-\frac{1}{t^2}, t>0.$$

Η g' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(t)=\left(-\ln t-\frac{1}{t^2}\right)'=-\frac{1}{t}-\left(t^{-2}\right)'=-\frac{1}{t}-\left(-2t^{-3}\right)=-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^3}, t>0.$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$g''(t)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{t}+\frac{2}{t^3}=0\underset{\cdot t^3}{\overset{t>0}{\Leftrightarrow}}-t^2+2=0\overset{t>0}{\Leftrightarrow}t=\sqrt{2}.$$

Λύνουμε την ανίσωση:

$$g''(t)>0\Leftrightarrow -\frac{1}{t}+\frac{2}{t^3}>0\underset{\cdot t^3}{\overset{t>0}{\Leftrightarrow}}-t^2+2>0\overset{\text{ετερ.του α}}{\Leftrightarrow}t\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\overset{t>0}{\Leftrightarrow}$$

$$t\in\left(0,\sqrt{2}\right).$$

Ο πίνακας προσήμων της g' είναι:

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
g''	||	$+$	0	$-$	
g'	||	$\nearrow$		$\searrow$	
			Ο.Μ.		

Η g' παρουσιάζει μέγιστο για $t=\sqrt{2}$. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(\sqrt{2},g\left(\sqrt{2}\right)\right)$ δηλαδή το $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\ln\sqrt{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Γ.i. Είναι $\bar{x}=9$ και $s_x=1$. Για τις τεταγμένες y_i των σημείων που ανήκουν στην ευθεία (ε):y=-x+3 έχουμε ότι:

$$\bar{y}=-\bar{x}+3=-9+3=-6 \text{ και } s_y=|-1|s_x=1.$$

ii. Ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων είναι:

$CV_y=\frac{s_y}{\left|\bar{y}\right|}=\frac{1}{6}>\frac{10}{100}$, άρα το δείγμα των τεταγμένων δεν είναι ομοιογενές.

iii. Έστω c η σταθερά που προσθέτουμε στις τεταγμένες y_i. Τότε οι νέες παρατηρήσεις, θα έχουν τη μορφή $z_i = y_i + c, i = 1, 2, ..., \kappa$.

Άρα $\bar{z} = \bar{y} + c = -6 + c$ και $s_z = s_y = 1$. Πρέπει:

$$CV_z \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{s_z}{|\bar{z}|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{|-6+c|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |-6+c| \geq 10 \Leftrightarrow$$

$-6 + c \geq 10$ ή $-6 + c \leq -10$ δηλαδή $c \geq 16$ ή $c \leq -4$.

Επομένως η ελάχιστη θετική σταθερά που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση y_i, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές είναι c=16.