ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **148**

Υλη:Παράγωγοι **Γ΄ Λυκείου**

Ον/μο:……………….. **03-02-13**

Θετ-Τεχν.

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

A.1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σ΄ ένα διάστημα Δ. Αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **(μον.7)**

2.Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat .
Ποιο άλλο θεώρημα έχει το ίδιο συμπέρασμα ; **(μον.4)**

3.Να δώσετε τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης σ΄ ένα διάστημα Δ. **(μον.2)**

4.Τι ονομάζεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f; **(μον.2)**

B. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1.Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο α,β με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in \alpha,\beta$ ώστε $f'(x_0)<0$. **Σ Λ**

2.Αν $f'(x)=(x-3)^2(x-1)$ για κάθε $x\in R$, τότε :

α) το f(3) είναι τοπικό μέγιστο της f **Σ Λ**

β) το f(1) είναι τοπικό ελάχιστο της f **Σ Λ**

3. Η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f όπου :

α) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$ **Σ Λ**

Σ Λ

4. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής . **Σ Λ**

5. Αν $f(x)\le 11$ για κάθε $x\in A_f$ τότε η f έχει μέγιστο το 11. **Σ Λ**

(μον.5)

Γ. Σε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε την ευθεία που είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$:

<u>Συνάρτηση</u>	**<u>Ασύμπτωτη</u>**
1. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$	**Α.** y=2
2. $f(x)=-x+1+\frac{1}{e^x}$	**Β.** y=x-1
3. $f(x)=2+\frac{3}{x-2}$	**Γ.** y=-x+1
	Δ. y=x
	Ε. y=-x

(μον.3)

Δ. Αν f΄(x)>0 για κάθε $x \in -1,1$ και $f(0)=0$, τότε :

1. $f(1)=-1$ **2.** $f(-1)>0$ **3.** $f(1)>0$ **4.** $f(-1)=0$

Κυκλώστε τη σωστή απάντηση . **(μον.2)**

<u>ΘΕΜΑ 20</u>

Α.1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης :

$$f(x)=\begin{cases} x^4-2x^2, & x<2 \\ -x^2+6x-8, & x\geq 2 \end{cases}$$ **(μον.5)**

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της . **(μον.5)**

Β. Έστω μια συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει : $2f(x^2)-f^2(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει $x_0 \in 0,1 : f'(x_0)=0$ **(μον.5)**

2. $f'(0)=f'(1)$ **(μον.5)**

3. Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (0,1) **(μον.5)**

ΘΕΜΑ 3^0

Έστω συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to R$, $f''(x)=\frac{4}{x^3}$ για κάθε $x<0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)=3$

1. Βρείτε τον τύπο της f **(μον.9)**

2. Αν $f(x)=\frac{2}{x}-2x+3$ ο τύπος της f και $\theta\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ να λύσετε την εξίσωση : $\frac{1}{\eta\mu\theta}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta$ **(μον.7)**

3. Να δείξετε ότι η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ **(μον.4)**

4. Να δείξετε ότι : $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$ για κάθε x<0 **(μον.5)**

ΘΕΜΑ 4^0

1. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σ΄ ένα διάστημα Δ .Να δείξετε ότι :

$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, για κάθε α , β ∈Δ **(μον.8)**

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1}$, $x>-1$

α. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή . **(μον.5)**

β. Να δείξετε ότι $f(x)>-2x-2013$ **(μον.5)**

γ. Αν $\alpha>\frac{1}{e}$, $\beta>\frac{1}{e}$ να δείξετε ότι :

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\sqrt{\alpha\beta}}{\ln\sqrt{\alpha\beta}+1}$$ **(μον.7)**

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0

Α. 1. Θεωρία **2.** Θεωρία **3**. Θεωρία **4**. Θεωρία

Β. 1. Σ **2.**αΛ , **β**Σ **3.α**Λ , **β**Σ **4.**Σ **5.**Λ

Γ. 1.Δ **2.**Γ **3.**Α

Δ. 3

ΘΕΜΑ 2^0

Α. 1. Η f έχει : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=8$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ και f(2)=0 .

Δεν είναι λοιπόν συνεχής στο x_0=2 . Άρα ούτε παραγωγίσιμη .
Έχει παράγωγο την :

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3-4x, & x<2\\ -2x+6, & x>2\end{cases}=\begin{cases}4x(x^2-1), & x<2\\ -2x+6, & x>2\end{cases}$$

με ρίζες από τον πρώτο κλάδο τις $x_1=0,\quad x_2=-1,\quad x_3=1$

και από τον δεύτερο την $x_4=3$

Σχηματίζουμε πίνακα μεταβολών όπου φαίνεται η μονοτονία και τα ακρότατα .

x	-∞		-1		0		1		2		3		+∞
f′		-	0	+	0	-	0	+	‖	+	0	-	
f	-∞	↘		↗		↘		↗	8 ‖ 0	↗		↘	-∞
			τ.ε -1		τ.μ 0		τ.ε -1		τ.ε 0		τ.μ 1		

Η f δεν είναι συνεχής στο 2.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=8$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ και f(2)=0 , είναι $f(x)\ge 0$ για κάθε x κοντά στο 2. Σύμφωνα με τον ορισμό του τ. ελάχιστου η f έχει τ. ελάχιστο στο 2, το 0, κι ας μην αλλάζει εκατέρωθέν του η μονοτονία.

Ακόμη:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim(x^4 - 2x^2) = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2 + 6x - 8) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$

Το σύνολο τιμών για κάθε διάστημα είναι :

$f(A_1) = -1,+\infty$, $f(A_2) = -1,0$, $f(A_3) = -1,0$,

$f(A_4) = -1,8$, $f(A_5) = 0,1$ και $f\ A_6 = -\infty,1$.

Το 0 περιέχεται στα $f(A_1)$, $f(A_4)$, $f(A_5)$, $f(A_6)$

και στα $f(A_2)$ και $f(A_3)$ είναι κοινό άκρο .

Λόγω και της μονοτονίας , η f έχει 5 ρίζες .

Το σύνολο τιμών της f είναι :

$f(A) = -1,+\infty \cup -1,0 \cup -1,0 \cup -1,8 \cup 0,1 \cup -\infty,1 =$

$=(-\infty,+\infty)$.

B. Έχουμε ότι $2f(x^2) - f^2(x) \geq 1$ δηλ $2f(x^2) - f^2(x) - 1 \geq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Θεωρώ την $g(x) = 2f(x^2) - f^2(x) - 1$ **,** $x \in \mathbb{R}$ **.** Είναι :

- $g(0) = 2f(0) - f^2(0) - 1 = -\ f(0) - 1\ ^2$ και λόγω της (1) είναι

  $g(0) \geq 0$ δηλ $\ f(0) - 1\ ^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$

- $g(1) = 2f(1) - f^2(1) - 1 = -\ f(1) - 1\ ^2$ και λόγω της (1) είναι

  $g(1) \geq 0$ δηλ $\ f(1) - 1\ ^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$

Η g λοιπόν για $x_1=0$ και $x_2=1$ έχει ελάχιστο το 0 οπότε από το Θ. Fermat προκύπτει ότι $g'(0) = 0$ και $g'(1) = 1$ (2)

1. Αφού $f(0) = f(1)$ **,** f συνεχής στο $\ 0,1\ $ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, απ’το Θ.Rolle προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in\ 0,1\ : f'(x_0) = 0$

2. Είναι $g'(x) = \left[2f(x^2) - f^2(x) - 1\right]' =$

$= 2f'(x^2)\cdot(x^2)' - 2f(x)f'(x) = 4xf'(x^2) - 2f(x)f'(x)$

- Αφού $g'(0) = 0 \Rightarrow 4\cdot 0\cdot f'(0^2) - 2f(0)\cdot f'(0) = 0 \Rightarrow$
  $2\cdot 1\cdot f'(0) = 0$. Άρα $f'(0) = 0$

- Αφού $g'(1)=0 \Rightarrow 4\cdot 1\cdot f'(1^2)-2f(1)\cdot f'(1)=0 \Rightarrow$
  $4f'(1)-2\cdot 1\cdot f'(1)=0$. Άρα $2f'(1)=0$ και $f'(1)=0$
  Έτσι $f'(0)=f'(1)$

3. Από τα ερωτήματα 1 και 2 έχουμε :
$f'(0)=f'(x_0)=f'(1)$. Από θ.Rolle στα διαστήματα
$0,x_0$, $x_0,1$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_1\in(0,x_0)$ και $x_2\in(x_0,1)$
ώστε : $f''(x_1)=0$ και $f''(x_2)=0$.Άρα η f΄΄ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (0,1) .

ΘΕΜΑ 3^0

1. Έχουμε ότι $f''(x)=\dfrac{4}{x^3}$ $\forall x<0$ άρα $(f'(x))'=\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)' \Leftrightarrow$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+c_1 \Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{2}{x}+c_1x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{2}{x}+c_1x+c_2 \quad (1)$$

Είναι $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{2}{x^2}+c_1+\dfrac{c_2}{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2\Rightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2}+c_1+\frac{c_2}{x}\right)=-2\Rightarrow 0+c_1+0=-2\Rightarrow c_1=-2$$

Η (1) $\Rightarrow f(x)=\dfrac{2}{x}-2x+c_2$ **(2)** $\Leftrightarrow f(x)+2x=\dfrac{2}{x}+c_2$

και αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x =3\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x}+c_2\right)=3$

δηλ $0+c_2=3\Rightarrow c_2=3$

Άρα $f(x)=\dfrac{2}{x}-2x+3$ από την (2).

2. Η εξίσωση $\dfrac{1}{\eta\mu\theta}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta$ γράφεται :

$$\frac{1}{\eta\mu\theta}-\eta\mu\theta=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}-\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \frac{2}{\eta\mu\theta}-2\eta\mu\theta+3=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}-2\sigma\upsilon\nu\theta+3 \Leftrightarrow$$

$f(\eta\mu\theta)=f(\sigma\upsilon\nu\theta)$ (3).

Η f , από το 1 ερώτημα , έχει $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}-2<0$

άρα είναι γνησίως φθίνουσα , επομένως και ΄΄1-1΄΄

Η (3) λοιπόν γίνεται ημθ=συνθ και επειδή $\theta\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $\theta=-\dfrac{3\pi}{4}$

3. Είναι $f''(x)=\dfrac{4}{x^3}<0$, $\forall x<0$.

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $-\infty,0$.

4. Στα διαστήματα $x-1,x$, $x,x+1$ η f είναι συνεχής και στα $x-1,x$, $(x,x+1)$ παραγωγίσιμη .

Από το Θ.Μ.Τ λοιπόν υπάρχουν $\xi_1\in(x-1,x)$ και $\xi_2\in(x,x+1)$

ώστε : $f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$ και $f'(\xi_2)=f(x+1)-f(x)$

Έχουμε : $\xi_1<x<\xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)>f'(x)>f'(\xi_2)\Rightarrow$

$f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$ $\forall x<0$.

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ , η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

- Αν α=β τότε η σχέση $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

  γίνεται $2f(\alpha)\geq 2f(\alpha)$ το οποίο ισχύει ως ισότητα .

● Έστω α<β .Στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

η f είναι συνεχής και στα αντίστοιχα ανοιχτά παραγωγίσιμη .

Από το Θ.Μ.Τ επομένως προκύπτει ότι υπάρχουν

$\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ ώστε :

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (1)$$

Αφού $\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)>2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Αρα $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Όμοια αν α>β .

2. α. Η $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1},\quad x>-1$ έχει : $f'(x)=\left(\frac{2-x^2}{x+1}\right)'=$

$$=\frac{-2x(x+1)-(2-x^2)}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x-2}{x+1^{\;2}} \text{ και}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)(x+1)^2-(-x^2-2x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(-2x-2)(x+1)+(x^2+2x+2)\cdot 2}{(x+1)^3}=\ldots=\frac{2}{(x+1)^3}>0\ ,\ \forall x>-1$$

άρα η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

β. Είναι $f(0)=2$ **,** $f'(0)=-2$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Μ(0,2) είναι η $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-2=-2x$ δηλ $\varepsilon: y=-2x+2$.Αφού η f είναι κυρτή ισχύει ότι : $f(x)\geq -2x+2$ δηλ $f(x)\geq -2x+2>-2x-2013$ άρα $f(x)>-2x-2013$.

γ. Ισχύει ότι $\alpha>\frac{1}{e}$, $\beta>\frac{1}{e}$ άρα $\ln\alpha>\ln\frac{1}{e}=-1$, $\ln\beta>-1$ και $\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}>-1$**.**

Η προς απόδειξη ανισότητα

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\sqrt{\alpha\beta}}{\ln\sqrt{\alpha\beta}+1}$$ γράφεται :

$f(\ln\alpha)+f(\ln\beta)\geq 2\cdot f(\ln\sqrt{\alpha\beta})$ (1)

Όμως $f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)=f\left(\frac{\ln(\alpha\beta)}{2}\right)=f\left(\ln(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\right)=$

$=f\left(\ln\sqrt{\alpha\beta}\right)$ (2)

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$f\left(\ln\alpha\right)+f(\ln\beta)\geq 2f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)$

που ισχύει , από το 1^0 ερώτημα , γιατί η f είναι κυρτή στο $\left(-1,+\infty\right)$.