ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **147**

Υλη: Μιγαδικοί-Συναρτήσεις-Παράγωγοι

Γ΄ Λυκείου **2-12-12**

Ον/μο:……………….. **Θετ-Τεχν.**

ΘΕΜΑ 1^0

Α.1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε την παράγωγό της. **(μον.10)**

2.Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. **(μον.5)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1.Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$ τότε $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x}, x\in R_+^*$. **Σ Λ**

2.Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με f(6)g(6). **Σ Λ**

3.Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και f(-1)=4, f(1)=3, τότε υπάρχει $x_o\in(-1,1)$ ώστε $f(x_o)=\pi$. **Σ Λ**

4. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. **Σ Λ**

5.Για τους μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύει: $|z_1+z_2|\ge|z_2|-|z_1|$ **Σ Λ**

(μον.5)

Γ. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

1.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς , λάθος είναι ο:

α)Η g είναι συνεχής στο 2.

β)Η f είναι συνεχής στο 1.

γ)Η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

2.Αν το $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει ,τότε:

α) $x_o=0$ **β)** $x_o=2$ **γ)** $x_o=-1$ **δ)** $x_o=1$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = \ 0,3\ $, με f(0)=2, f(1)=1, f(3)= –1.

Ποιός απ΄ τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ΄ ανάγκη απ' τις υποθέσεις;

α) Υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$

β) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$

γ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

δ) $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$

ε) Η μέγιστη τιμή της f στο [0,3] είναι το 2 και η ελάχιστη το -1.

4. Το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

α) $\dfrac{1}{x^2}$ **β)** $-\dfrac{2}{x^3}$ **γ)** $-\dfrac{1}{x^2}$ **δ)** $-\dfrac{2}{x}$ **ε)** 0

5. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_o είναι παράλληλες, τότε το x_o είναι:

α) 0 **β)** $\dfrac{1}{4}$ **γ)** $\dfrac{1}{2}$ **δ)** 1 **ε)** 2 **(μον.5)**

<u>ΘΕΜΑ 2^0</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση f που είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο [0,1] και για την οποία ισχύει:

$f^2(0) + f^2(1) + 13 = 6f(0) + 4f(1)$ **(1)**

α) Να δείξετε ότι:

1. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1]. **(μον.5)**

2. υπάρχει μοναδικός $x_o \in (0,1)$ ώστε $\dfrac{f(x_o)}{x_o} = 3$ **(μον.5)**

β) 1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) και η ευθεία y=3x έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη στο (0,1). **(μον.5)**

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{3x} - 1$ τέμνει τον x΄x μόνο σ΄ ένα σημείο του διαστήματος (0,1). **(μον.5)**

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^3 - 3x + 4) - 1) > 3$ **(μον.5)**

ΘΕΜΑ 3^0

Α. Εστω ότι $g(x)=\lim\limits_{h\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x^2+e^{hx}}\right), h>0$

α. Να δείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}, & x\le 0\\ 0 & , x>0\end{cases}$ **(μον.7)**

β. Να εξετάσετε αν η g είναι συνεχής. **(μον.4)**

γ. Αν κ, λ, μ, θετικοί και α, β, γ $\in$[-1,3], να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ $\in$ [-1,3] ώστε:

$g(\xi)=\dfrac{\kappa g(\alpha)+\lambda g(\beta)+\mu g(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu}$. **(μον.5)**

Β.α)Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. **(μον.5)**

β) Να βρείτε την παράγωγο της $g(x)=\sqrt[3]{x^2}\cdot \eta\mu x$, στο $x_o=0$. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ 4^0

Εστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο [1,2] με f(1)=-1, f(2)=1.Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+yi,\ x,y\in R$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=|z|$.

1.Να αποδείξετε ότι:

α)Το σύνολο τιμών της f είναι το [-1,1] **(Μον.4)**

β)Im(z)=1 **(Μον.5)**

γ)Υπάρχει ακριβώς μία τιμή του Re(z) τέτοια ώστε ο αριθμός $w=z^2-\dfrac{1}{z}$ να είναι πραγματικός. **(Μον.7)**

2. Αν $\Phi(x)=\mathrm{Im}(w)\cdot(x^2+1)$

α)Η Φ' είναι άρτια. **(Μον.3)**

β)Η $C_{\Phi'}$ δέχεται κάθετες μεταξύ τους εφαπτόμενες. **(Μον.6)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0

Α. α) Θεωρία **β)** Θεωρία
Β. 1Σ, 2Λ, 3Σ, 4Λ, 5Σ
Γ. 1γ, 2δ, 3ε, 4γ, 5γ

ΘΕΜΑ 2^0

α)

1.Η ισότητα $f^2(0)+f^2(1)+13=6f(0)+4f(1)$ **(1)**γράφεται:

$$f^2(0)-6f(0)+9+f^2(1)-4f(1)+4=0 \Leftrightarrow (f(0)-3)^2+(f(1)-2)^2=0.$$

Άρα f(0)=3 και f(1)=2. Αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο [0,1], 0<1 και f(0)>f(1) η f είναι γνησίως φθίνουσα.

2.Θεωρώ την h(x)=f(x)-3x.

►Η h είναι συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών.

►h(0)=f(0)=3 , h(1)=f(1)-3=2-3=-1 άρα h(0)h(1)<0.

Απ΄το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας

$$x_o \in (0,1): h(x_o)=0 \text{ ή } \frac{f(x_o)}{x_o}=3.$$

Η f είναι γν. φθίνουσα, η -3x επίσης άρα η h είναι γν. φθίνουσα. Το x_o Λοιπόν είναι μοναδικό.

β)

1.Η εξίσωση f(x)=3x, σύμφωνα με το **α2)** έχει μοναδική λύση στο (0,1). Αρα η C_f και y=3x έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη στο(0,1).

2.Η εξίσωση g(x)=0 δηλ. η $\frac{f(x)}{3x}-1=0 \Leftrightarrow f(x)=3x$ έχει σύμφωνα με το **α2)** μοναδική ρίζα στο (0,1).Αρα η C_g τέμνει τον x΄x σε μοναδικό σημείο του (0,1).

γ)

1.Η f, ως γν. φθίνουσα, αντιστρέφεται στο Δ=[0,1] και έχει f(Δ)=[f(1),f(0)] =[2,3] το οποίο είναι πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Η ανίσωση $f(f^{-1}(x^3-3x+4)-1)>3$ γράφεται:

$$f(f^{-1}(x^3-3x+4)-1)>f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x^3-3x+4)-1<0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x^3-3x+4)<f^{-1}(2) \overset{f^{-1}\downarrow}{\Leftrightarrow} x^3-3x+4>2 \Leftrightarrow x^3-3x+2>0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x^2+x-2)>0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)>0$ Αρα $x\in(-2,1)\cup(1,\infty)$

ΘΕΜΑ 3^0

Α.α) Εστω $\varphi(h)=\dfrac{x}{1+x^2+(e^x)^h}, h>0.$

●Αν

$0<e^x<1 \Leftrightarrow x<0$ τότε $\lim\limits_{h\to+\infty}\varphi(h)=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2+(e^x)^h}=\dfrac{x}{1+x^2+0}=\dfrac{x}{1+x^2}$

●Αν $e^x>1 \Leftrightarrow x>0$ τότε $\lim\limits_{h\to+\infty}\varphi(h)=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2+(e^x)^h}=\dfrac{x}{1+x^2+\infty}=0$

●Αν $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ τότε $\varphi(h)=\dfrac{0}{1+0^2+1^h}=0$

Αρα $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}, & x<0\\ 0 & ,x\geq 0\end{cases}$

β) Η g είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως ρητή, συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως σταθερή.Εξετάζω αν είναι στο x_o=0.

Εχει: $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x^2+1}=0,\ \lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(0)=0$ και

$g(0)=\dfrac{0}{0^2+1}=0.$ Αρα είναι συνεχής και στο 0.

Η g λοιπόν είναι συνεχής στο R.

γ)Αφού η g είναι συνεχής στο [-1,3], έχει ελάχιστη(**m**) και μέγιστη(**M**) τιμή. Ετσι:

$$\left.\begin{matrix} m\leq g(\alpha)\leq M\\ m\leq g(\beta)\leq M\\ m\leq g(\gamma)\leq M\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} \kappa m\leq \kappa g(\alpha)\leq \kappa M\\ \lambda m\leq \lambda g(\beta)\leq \lambda M\\ \mu m\leq \mu g(\gamma)\leq \mu M\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$(\kappa+\lambda+\mu)m\leq \kappa g(\alpha)+\lambda g(\beta)+\mu g(\gamma)\leq(\kappa+\lambda+\mu)M \Leftrightarrow$

$m \le \dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)+\mu f(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu} \le M$. Αρα υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ στο [-1,3] ώστε $g(\xi)=\dfrac{\kappa g(\alpha)+\lambda g(\beta)+\mu g(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu}$.

Β.

α)Η $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το Α=[0,+∞) και γράφεται

$$f(x)=|x|^{\frac{2}{3}}=\begin{cases}(-x)^{\frac{2}{3}}, \alpha\nu\ x<0\\ x^{\frac{2}{3}},\ \alpha\nu\ x\ge 0\end{cases}$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.Η παράγωγός της είναι :

$$f'(x)=\begin{cases}[(-x)^{\frac{2}{3}}]', x<0\\ (x^{\frac{2}{3}})', x>0\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}}, x<0\\ \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, x>0\end{cases}$$

β)Η $g(x)=\sqrt[3]{x^2}\eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το Α=R και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{x^2}\dfrac{\eta\mu x}{x})=0\cdot 1=0$ οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0)=0$.

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

1.α)Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο Δ=[1,2] και 1<2
Με f(1)<f(2), είναι γν.αύξουσα. Εχει επομένως σύνολο τιμών το
f(Δ)= [f(1),f(2)]= [-1,1].

β)Απ΄την ισότητα

$|z-2i|=|z| \Leftrightarrow |x+yi-2i|=|x+yi| \Leftrightarrow |x+(y-2)i|=|x+yi| \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow -4y+4=0 \Leftrightarrow y=1$ δηλ. Im(z)=1.

γ)Είναι**:** $w = z^2 - \frac{1}{z} = (x+i)^2 - \frac{1}{x+i} = x^2 + 2xi - 1 - \frac{x-i}{x^2+1} =$

$(x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1}) + (2x + \frac{1}{x^2+1})i = (x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1}) + \frac{2x^3+2x+1}{x^2+1}i$ **.**

Αφού θέλω να είναι w πραγματικός ,πρέπει $2x^3+2x+1=0$ **(1)**

Θα δείξω ότι η (1) έχει ακριβώς μια ρίζα.

Θεωρώ την $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$ με A=R στο οποίο είναι συνεχής.Εχει $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^3) = +\infty$ άρα έχει σύνολο τιμών το g(A)=R. Σ΄ αυτό περιέχεται το 0, άρα η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα . Επειδή $g'(x) = 6x^2 + 2 > 0,$ η g είναι γν. αύξουσα και η ρίζα μοναδική. Υπάρχει λοιπόν ένας ακριβώς x=Re(z),ώστε $w \in R$.

2. Είναι $\Phi(x) = \frac{2x^3+2x+1}{x^2+1}(x^2+1) = 2x^3 + 2x + 1 = g(x)$ άρα

α) $\Phi'(x) = g'(x) = 6x^2 + 2$ **,**άρτια

β)Αν υπήρχαν δύο σημεία, $A(x_1, \Phi'(x_1))$ και $B(x_2, \Phi'(x_2))$ στα οποία οι εφαπτόμενες της $C_{\Phi'}$ ήταν κάθετες,θα ήταν

$\lambda_1\lambda_2 = -1$ δηλ. $\Phi''(x_1)\Phi''(x_2) = -1$ δηλ. $12x_1 \cdot 12x_2 = -1$ δηλ. $x_1x_2 = -\frac{1}{12^2}$

Αν θεωρήσουμε $x_1 = \frac{1}{12}$ και $x_2 = -\frac{1}{12}$ **,** τα σημεία A και B είναι δύο σημεία της $C_{\Phi'}$ στα οποία οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

(Προφανώς υπάρχουν κι΄ άλλα σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες είναι κάθετες π.χ. $x_1 = \frac{1}{2}, \ x_2 = -\frac{1}{72}$, ή και άλλα…)