ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

147

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **Γεν. Παιδείας**

02-11-14

Θέμα 1ο :

Α. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f; **(6 μον.)**

Β. Να διατυπώσετε το κριτήριο μονοτονίας. **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=|x|$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. **(5 μον.)**

Δ. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x)=3x^2-7x,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. $g(x)=8\eta\mu x+\ln x,\ x>0$.

iii. $h(x)=e^{\eta\mu x},\ x\in\mathbb{R}$. **(3x1=3μον.)**

Ε. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Η $f(x)=3x^2+5x$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. **Σ Λ**

ii. Είναι: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$. **Σ Λ**

iii. Ένα σώμα, για το οποίο η συνάρτηση της θέσης του σε σχέση με το χρόνο είναι η $x(t)=t^3-2t^2+6$, είναι ακίνητο τις χρονικές στιγμές $t_1=0s$ και $t_2=\dfrac{4}{3}s$. **Σ Λ**

iv. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$ **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $f(x)=x\ln x, x>0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\dfrac{1}{e}$. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

Θέμα 2^o:

Α. Ένα σώμα κινείται σύμφωνα με τη συνάρτηση $x(t)=\frac{t^3}{3}-3t^2+8t$,

όπου t ο χρόνος σε sec.

i. Να εκφράσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος συναρτήσει του χρόνου t. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο. **(2 μον.)**

iii. Να βρείτε πότε το σώμα κινείται κατά τη θετική και πότε κατά τη αρνητική κατεύθυνση. **(6 μον.)**

iv. Να υπολογίσετε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει στη διάρκεια των 3 πρώτων δευτερολέπτων. **(4 μον.)**

v. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, διαρκώς αυξάνεται. **(4 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-\alpha x+\beta}{x^2+2}, & x\neq 2\\ 3 & , x=2\end{cases}$ με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α, β αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1). **(5 μον.)**

Θέμα 3^o:

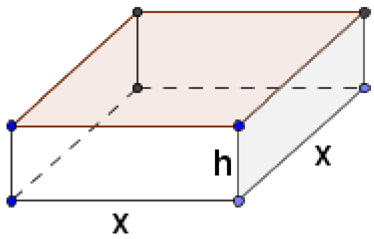
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+4x^2+6x+9,\ x\in\mathbb{R}$.

Α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -3}\frac{f(x)}{x^3+27}$. **(8 μον.)**

Β. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης. **(7 μον.)**

Γ. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες την ευθεία ε: y=6x-7. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $(0,f(0))$. **(10 μον.)**

Θέμα 4ο:



Το παραλληλεπίπεδο κουτί του διπλανού σχήματος, έχει όλες τις πλευρές του ξύλινες, εκτός από την επάνω, η οποία είναι μεταλλική. Ο όγκος του κουτιού είναι $1000dm^3$. Αν οι πλευρές έχουν διαστάσεις x μέτρα και h μέτρα αντίστοιχα τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι η επιφάνεια όλου του κουτιού συναρτήσει του x είναι: $E(x)=\frac{4}{x}+2x^2,\ x>0$. **(9 μον.)**

Β. Αν το ξύλο κοστίζει $10€/m^2$ και το μέταλλο κοστίζει $30€/m^2$, να εκφράσετε το κόστος των υλικών που απαιτούνται για την κατασκευή του κουτιού ως συνάρτηση του x. **(8 μον.)**

Γ. Να βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού όταν το κόστος του κουτιού $K(x)=40x^2+\frac{40}{x},\ x>0$ γίνεται ελάχιστο. **(8 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^o:

Α. Αν Β είναι το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση , με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'.

Β. ● Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

● Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Γ. Έχουμε $f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

Τότε $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h}$

● Αν h>0 τότε $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

● Αν h<0 τότε $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ που σημαίνει ότι f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0 .

Δ. i. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$f'(x) = (3x^2 - 7x)' = 6x - 7,\ x \in \mathbb{R}.$

ii. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$g'(x) = (8\eta\mu x + \ln x)' = 8\sigma\upsilon\nu x + \dfrac{1}{x},\ x > 0.$

iii. Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $h'(x) = (e^{\eta\mu x})' = e^{\eta\mu x} \cdot (\eta\mu x)' = e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R}.$

Ε . i. Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Λ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. Έχουμε την $x(t)=\dfrac{t^3}{3}-3t^2+8t$.

i. Η ταχύτητα του σώματος είναι: $u(t)=x'(t)=t^2-6t+8,\ t\geq 0.$

Η επιτάχυνση του σώματος είναι: $\alpha(t)=u'(t)=x''(t)=2t-6,\ t\geq 0.$

ii. Το σώμα είναι ακίνητο όταν $u(t)=0 \Leftrightarrow t^2-6t+8=0 \Leftrightarrow$ $t=2\text{s}$ ή $t=4\text{s}.$

iii. Το σώμα κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση, όταν:

$$u(t)>0 \Leftrightarrow t^2-6t+8>0 \overset{\text{ομ.του α}}{\Leftrightarrow} t<2\text{s} \text{ ή } t>4\text{s}.$$

Το σώμα κινείται κατά την αρνητική κατεύθυνση, όταν:

$$u(t)<0 \Leftrightarrow t^2-6t+8<0 \overset{\text{ετερ.του α}}{\Leftrightarrow} t\in(2,4).$$

iv. Η κίνηση του σώματος είναι η εξής:

Από t=0s έως t=2s το σώμα έχει διανύσει διάστημα:

$$S_1=\left|x(0)-x(2)\right|=\left|0-\frac{20}{3}\right|=\frac{20}{3}\text{m}.$$

Από t=2s έως t=3s το σώμα έχει διανύσει διάστημα:

$$S_2=\left|x(2)-x(3)\right|=\left|\frac{20}{3}-6\right|=\frac{2}{3}\text{m}.$$

Άρα το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα στη διάρκεια των 3 πρώτων δευτερολέπτων είναι: $S_{ολ.}=S_1+S_2=\dfrac{22}{3}\text{m}.$

v. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση $\alpha(t)=2t-6.$ Βρίσκουμε την παράγωγο της επιτάχυνσης, που είναι $\alpha'(t)=2>0$ άρα η επιτάχυνση διαρκώς αυξάνεται στο $[0,+\infty).$

Β. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3-\alpha x+\beta}{x^2+2}\right) = \frac{8-2\alpha+\beta}{6}$ και $f(2)=3$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{8-2\alpha+\beta}{6} = 3 \Leftrightarrow 8-2\alpha+\beta = 18 \Leftrightarrow$

$-2\alpha+\beta = 10 (1)$

Επίσης η C_f διέρχεται από το σημείο A(1,1) άρα $f(1)=1 \Leftrightarrow$

$\frac{1-\alpha+\beta}{3} = 1 \Leftrightarrow 1-\alpha+\beta = 3 \Leftrightarrow \alpha-\beta = -2 (2)$

Από (1), (2) έχουμε: $\left.\begin{matrix}-2\alpha+\beta=10\\ \alpha-\beta=-2\end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix}-\alpha=8\\ \alpha-\beta=-2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=-8\\ \beta=-6\end{matrix}\right\}.$

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Είναι: $\lim\limits_{x\to -3}\frac{f(x)}{x^3+27} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2+6x+9}{x^3+27} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} (1)$.

Για την f(x) από σχήμα Horner για ρ=-3 έχουμε:

1 ↓	4 -3	6 -3	9 -9	-3
1	1	3	0	

Οπότε η (1) γίνεται: $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2+6x+9}{x^3+27} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)} =$

$\frac{9-3+3}{9+9+9} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Β. Έστω $M(x_0, f(x_0))$, το ζητούμενο σημείο. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο M είναι $f'(x_0)$. Ψάχνουμε την ελάχιστη τιμή της παραγώγου της συνάρτησης f. Θα βρούμε την f''.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$f'(x) = (x^3+4x^2+6x+9)' = 3x^2+8x+6,\ x\in\mathbb{R}$.

$f''(x) = (3x^2+8x+6)' = 6x+8,\ x\in\mathbb{R}$.

Λύνουμε την ανίσωση: $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x+8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{6} \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$.

Ο πίνακας προσήμων της f'' είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
f''	-		+
f'	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος για $x_0 = -\frac{4}{3}$.

Γ. Έστω $\Lambda(\omega, f(\omega))$ τα σημεία στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες στην ευθεία ε: y=6x-7. Τότε πρέπει:

$f'(\omega) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow 3\omega^2 + 8\omega + 6 = 6 \Leftrightarrow 3\omega^2 + 8\omega = 0 \Leftrightarrow \omega(3\omega + 8) = 0 \Leftrightarrow$

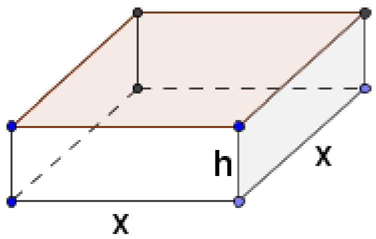
$\omega = 0$ ή $\omega = -\frac{8}{3}$.

Για το σημείο $\Lambda(0, f(0))$ η αντίστοιχη εφαπτομένη είναι η

$\varepsilon_1 : y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 9 = 6x \Leftrightarrow y = 6x + 9$.

Θέμα 4°:

Α. Η επιφάνεια του κουτιού ισούται με $E = E_{\pi\alpha\rho.\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} + 2E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma}$. Οι βάσεις είναι τετράγωνα άρα το εμβαδόν τους είναι $E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\omega\nu} = x^2$.



Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ισούται με: $E_{\pi\alpha\rho.\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} = 4xh$. Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι $E = 4xh + 2x^2 \ (1)$. Όμως, $V = 1000dm^3 = 1m^3$ άρα έχουμε:

$V = 1 \Leftrightarrow x^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$. Τότε η (1) γίνεται:

$E(x) = 4x\frac{1}{x^2} + 2x^2 = \frac{4}{x} + 2x^2$. Για να ορίζεται αυτή η συνάρτηση πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ h > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x > 0.$$

Β. Το κόστος της κάτω βάσης που είναι ξύλινη είναι: $10x^2$.
Το κόστος της παράπλευρης επιφάνειας που είναι ξύλινη είναι:
$$10\cdot(4xh)=40x\frac{1}{x^2}=\frac{40}{x}.$$
Το κόστος της άνω βάσης που είναι μεταλλική είναι: $30x^2$.
Άρα το συνολικό κόστος για την κατασκευή του κουτιού είναι:
$$K(x)=10x^2+\frac{40}{x}+30x^2=40x^2+\frac{40}{x},\ x>0.$$

Γ. Η συνάρτηση του κόστους είναι η $K(x)=40x^2+\frac{40}{x},\ x>0.$
Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων:
$$K'(x)=\left(40x^2+\frac{40}{x}\right)'=80x-\frac{40}{x^2},\ x>0.$$
Λύνουμε την ανίσωση: $K'(x)\geq 0\Leftrightarrow 80x-\frac{40}{x^2}\geq 0\overset{x^2>0}{\Leftrightarrow}80x^3-40\geq 0\Leftrightarrow$
$$x^3\geq\frac{40}{80}\Leftrightarrow x^3\geq\frac{1}{2}\overset{x^3\nearrow}{\Leftrightarrow}x\geq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Leftrightarrow x\geq 2^{-\frac{1}{3}}.$$
Ο πίνακας προσήμων της K' είναι:

x	0	$2^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
K'	-		+
K	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε.	

Το κόστος για την κατασκευή του κουτιού γίνεται ελάχιστο
όταν $x=2^{-\frac{1}{3}}$ και $h=\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2}=\frac{1}{2^{-\frac{2}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$.