ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **146**

Υλη: Συνέχεια
Γ΄ Λυκείου **2-12-12**
Ον/μο:……………….. **Θετ-Τεχν.**

<u>ΘΕΜΑ 1^0</u>

Α. α)Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σ΄ ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

β)Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής σ΄ ένα διάστημα (α, β);

γ) Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής σ΄ ένα διάστημα [α,β];

δ)Η C_f συνάρτησης f κόβεται σ΄ ένα σημείο με τετμημένη x_o. Είναι ή όχι ασυνεχής σ΄ αυτό; **(μον.6)**

Β.α)Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, να το αποδείξετε και να δώσετε ένα παράδειγμα με γραφική παράσταση στο οποίο να φαίνεται ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. **(μον.12)**

β)Εστω συνεχής συνάρτηση $f:\ 2,10\ \to Z$.Να δείξετε ότι είναι σταθερή. **(μον.2)**

Γ. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις:

α)Αν $f(x)\le 10$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της, το 10 είναι μέγιστο της f. Σ Λ

β)Αν δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για μια συνάρτηση, τότε η συνάρτηση δεν έχει ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα. Σ Λ

γ)Μια συνάρτηση έχει το πολύ τόσες ρίζες όσα τα διαστήματα μονοτονίας της. Σ Λ

δ)Αν για μια συνάρτηση f είναι $f^2(x)=1$ τότε f(x)=1 ή f(x)=-1. Σ Λ

ε) Η $f(x)=\sigma\upsilon\nu x - x^2$ με Α=$[0,\frac{\pi}{2}]$, έχει σύνολο τιμών Σ Λ

f(A)=$[-\frac{\pi}{4},1]$.

(Μον.5)

ΘΕΜΑ 2^0

Α.

Δίνεται η f, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, & x\in(0,1) \\ 3^{2\kappa+1}-24, & x=1 \\ \dfrac{x-1+2\eta\mu(x-1)}{\eta\mu(x-1)}, & x\in(1,4]. \end{cases}$

Να οριστεί $\kappa\in N^*$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o=1$. **(μον.9)**

Β. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=2$ και ισχύει ότι
$2x^3-8x\le(x-2)f(x)\le 3x^3-6x^2+4x-8$, να βρείτε το f(2).

Γ. Εστω f συνεχής με f(1)+f(2)+f(3)=0.Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα. **(μον.8)**

ΘΕΜΑ 3^0

Θεωρούμε τη συνάρτηση f που είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο [0,1] και για την οποία ισχύει:
$f^2(0)+f^2(1)+13=6f(0)+4f(1)$ **(1)**

α)Να δείξετε ότι:

1.η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1]. **(μον.5)**

2.υπάρχει μοναδικός $x_o\in(0,1)$ ώστε $\dfrac{f(x_o)}{x_o}=3$ **(μον.5)**

β)1.Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) και η ευθεία y=3x έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη στο (0,1). **(μον.5)**

2.Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{3x}-1$ τέμνει τον x΄x μόνο σ΄ ένα σημείο του διαστήματος (0,1). **(μον.5)**

γ)Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^3-3x+4)-1)>3$ **(μον.5)**

ΘΕΜΑ 4^0

Α. Εστω ότι $g(x)=\lim\limits_{h\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x^2+e^{hx}}\right), h>0$

α. Να δείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$ **(μον.8)**

β. Να εξετάσετε αν η g είναι συνεχής. **(μον.5)**

γ. Αν κ, λ, μ, θετικοί και α, β, γ $\in[-1,3]$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ ∈ $\in[-1,3]$ ώστε:

$$g(\xi)=\frac{\kappa g(\alpha)+\lambda g(\beta)+\mu g(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu}.$$ **(μον.7)**

Β. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με f(1)=-2 και $-1,\ 2$ είναι διαδοχικές ρίζες της f(x)=0.Αν $\lim\limits_{x\to-2} f(x)>0$ να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)x^3+5x-2}{f(-3)x^2+3x+7}$. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0

Α. α, β, γ Θεωρία

δ)Δεν είναι κατ΄ ανάγκη ασυνεχής. Μπορεί το x_o στο οποίο κόβεται να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της.Δεν θα πούμε ότι η f είναι ασυνεχής σ΄ αυτό.

Β. **α)**Θεωρία

β)Αφού η f είναι συνεχής σε διάστημα, το σύνολο τιμών της είναι διάστημα. Επειδή οι τιμές της είναι ακέραιοι θα είναι σταθερή.

Γ. α Λ, β Λ, γ Σ, δ Λ, ε Σ

ΘΕΜΑ 2^0

Α. Η f είναι συνεχής στο 1 αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}^4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3-1)}{\sqrt{x}-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)=3,$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1+2\eta\mu(x-1)}{\eta\mu(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x-1}{\eta\mu(x-1)}+2\right)=3.$

Πρέπει λοιπόν να είναι

$3^{2\kappa+1}-24=3 \Leftrightarrow 3^{2\kappa+1}=27 \Leftrightarrow 3^{2\kappa+1}=3^3 \Leftrightarrow 2\kappa+1=3$ άρα $\kappa=1$

Β. Εχουμε: $2x^3-8x\le (x-2)f(x)\le 3x^3-6x^2+4x-8$ **(1)**

- Αν $x-2>0$ η (1) γίνεται: $\dfrac{2x(x^2-4)}{x-2}\le f(x)\le \dfrac{3x^2(x-2)+4(x-2)}{x-2}$

Δηλ. $2x(x+2)\le f(x)\le 3x^2+4$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x(x+2)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x^2+4)=16$ είναι ,σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=16$.

- Αν $x-2<0$, όμοια βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=16$.

Αρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=16$.Επειδή η f είναι συνεχής στο x_o=2 είναι και f(2)=16.

Γ. Απ΄ την ισότητα f(1)+f(2)+f(3)=0 προκύπτει ότι

●f(1)=f(2)=f(3)=0 οπότε 1, 2 , 3 ρίζες ή

● ότι δύο απ΄ αυτούς είναι ετερόσημοι. Εστω για παράδειγμα οι f(1) και f(2) .Απ΄ το θεώρημα Bolzano τότε , υπάρχει ένας τουλάχιστον ξ στο (1,2) ώστε f(ξ)=0.
Η f(x)=0 λοιπόν έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

ΘΕΜΑ 3^0

α)

1.Η ισότητα $f^2(0)+f^2(1)+13=6f(0)+4f(1)$ **(1)**γράφεται:

$f^2(0)-6f(0)+9+f^2(1)-4f(1)+4=0 \Leftrightarrow (f(0)-3)^2+(f(1)-2)^2=0$.

Άρα f(0)=3 και f(1)=2. Αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο [0,1], 0<1 και f(0)>f(1) η f είναι γνησίως φθίνουσα.

2.Θεωρώ την h(x)=f(x)-3x.

►Η h είναι συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών.

►h(0)=f(0)=3 , h(1)=f(1)-3=2-3=-1 άρα h(0)h(1)<0.

Απ΄το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας

$x_o \in (0,1): h(x_o)=0$ ή $\frac{f(x_o)}{x_o}=3$.

Η f είναι γν. φθίνουσα, η -3x επίσης άρα η h είναι γν. φθίνουσα. Το x_o λοιπόν είναι μοναδικό.

β)

1.Η εξίσωση f(x)=3x, σύμφωνα με το **α2)** έχει μοναδική λύση στο (0,1). Αρα οι C_f και y=3x έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη στο(0,1).

2.Η εξίσωση g(x)=0 δηλ. η $\frac{f(x)}{3x}-1=0 \Leftrightarrow f(x)=3x$ έχει σύμφωνα με το **α2)** μοναδική ρίζα στο (0,1).Αρα η C_g τέμνει τον x΄x σε μοναδικό σημείο του (0,1).

γ)

1.Η f, ως γν. φθίνουσα, αντιστρέφεται στο Δ=[0,1] και έχει f(Δ)=[f(1),f(0)] =[2,3] το οποίο είναι πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Η ανίσωση $f(f^{-1}(x^3-3x+4)-1)>3$ γράφεται:

$$f(f^{-1}(x^3-3x+4)-1)>f(0)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}(x^3-3x+4)-1<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x^3-3x+4)<f^{-1}(2)\overset{f^{-1}\downarrow}{\Leftrightarrow}x^3-3x+4>2\Leftrightarrow x^3-3x+2>0\Leftrightarrow$$

$(x-1)(x^2+x-2)>0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)>0$ **άρα** $x\in(-2,1)\cup(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 4^0

Α.α) Εστω $\varphi(h)=\dfrac{x}{1+x^2+(e^x)^h},h>0.$

●Αν

$0<e^x\le 1\Leftrightarrow x\le 0$ τότε $\lim\limits_{h\to+\infty}\varphi(h)=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2+(e^x)^h}=\dfrac{x}{1+x^2+0}=\dfrac{x}{1+x^2}$

●Αν $e^x>1\Leftrightarrow x>0$ τότε $\lim\limits_{h\to+\infty}\varphi(h)=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2+(e^x)^h}=\dfrac{x}{1+x^2+\infty}=0$

●Αν $e^x=1\Leftrightarrow x=0$ τότε $\varphi(h)=\dfrac{0}{1+0^2+1^h}=0$

Αρα $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$

β) Η g είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως ρητή, συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως σταθερή.Εξετάζω αν είναι στο x_o=0.

Εχει: $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x^2+1}=0,\ \lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(0)=0$ και

$g(0)=\dfrac{0}{0^2+1}=0.$ Αρα είναι συνεχής και στο 0.

Η g λοιπόν είναι συνεχής στο R.

γ)Αφού η g είναι συνεχής στο [-1,3], έχει ελάχιστη(**m**) και μέγιστη(**M**) τιμή. Ετσι:

$$\left.\begin{matrix}m\le g(\alpha)\le M\\ m\le g(\beta)\le M\\ m\le g(\gamma)\le M\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\kappa m\le\kappa g(\alpha)\le\kappa M\\ \lambda m\le\lambda g(\beta)\le\lambda M\\ \mu m\le\mu g(\gamma)\le\mu M\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$(\kappa+\lambda+\mu)m \le \kappa g(\alpha)+\lambda g(\beta)+\mu g(\gamma) \le (\kappa+\lambda+\mu)M \Leftrightarrow$

$m \le \dfrac{\kappa g(\alpha)+\lambda g(\beta)+\mu g(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu} \le M$. Αρα υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ στο [-1,3] ώστε $g(\xi)=\dfrac{\kappa g(\alpha)+\lambda g(\beta)+\mu g(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu}$.

Β. Αφού οι -1 και 2 είναι μοναδικές ρίζες της f(x)=0, και η f είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ και $(2,+\infty)$.
Αφού $\lim\limits_{x\to-2} f(x)>0$ θα είναι και f(-2)>0 άρα και f(-3)>0.Αφού f(1)=-2<0 θα είναι και f(0)<0.

Εχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)x^3+5x-2}{f(-3)x^2+3x+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)x^3}{f(-3)x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(0)}{f(-3)}x\right)=$

$=\dfrac{f(0)}{f(-3)}(+\infty)=-\infty$.