ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

146

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **Γεν. Παιδείας**

21/09/2014

Θέμα 1ο :

Α. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α , παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$; **(8 μον.)**

Β. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες να δείξετε ότι : $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$. **(7 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Η $f(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. **Σ Λ**

ii. Αν η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 τότε ισχύει ότι:
$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. **Σ Λ**

iii. Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, υπάρχει τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η παράγωγος της f στο x_0 είναι: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. **Σ Λ**

iv. $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

v. $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2e^x+2xe^x$. Να βρείτε:

i. Το πεδίο ορισμού της f. **(2 μον.)**

ii. Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες. **(2 μον.)**

iii. Τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. **(2 μον.)**

iv. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. **(2 μον.)**

Β. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}$ **(4 μον.)**

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{4-x}-2}$ **(5 μον.)**

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3\lambda x+2\lambda^2}{x-\lambda} & ,x\neq\lambda\\ -\lambda & ,x=\lambda\end{cases}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμής της παραμέτρου λ, αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=\lambda$. **(8 μον.)**

<u>Θέμα 3^o:</u>

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{3x}$.

i. Να βρείτε την f' και την f''. **(6 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι $3f'(x)-f''(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$. **(3 μον.)**

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1+6x}$. Να βρείτε:

i. Το πεδίο ορισμού της f. **(3 μον.)**

ii. Το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 4. **(5 μον.)**

iii. Το σημείο στο οποίο η παραπάνω εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των y. **(4 μον.)**

iv. Τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία y=x+2. **(4 μον.)**

<u>Θέμα 4^o:</u>

Α. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x. Να εκφράσετε το ύψος του ως συνάρτηση :

i. Της πλευράς x. **(8 μον.)**

ii. Του εμβαδού του Ε. **(7 μον.)**

Β. Αν η συνάρτηση του ύψους ως προς το εμβαδόν είναι η $\upsilon(E)=\sqrt[4]{3E^2}$, να βρείτε:

i. Το ρυθμό μεταβολής του ύψους. **(6 μον.)**

ii.Το ρυθμό μεταβολής του ύψους όταν Ε=2cm^2. **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^{o}:

Α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

Β. Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Τότε $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\right] =$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \overset{f,g \text{ παραγωγίσιμες}}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Γ . i. Σ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

Θέμα 2^{o}:

Α. Έχουμε την $f(x) = x^2e^x + 2xe^x$.

i. Η f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

ii. Για να τέμνει η C_f τον άξονα x΄x πρέπει :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2e^x + 2xe^x = 0 \Leftrightarrow e^x\left(x^2+2x\right) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \text{ ή } x^2 + 2x = 0$$

Η $e^x = 0$ είναι αδύνατη, οπότε έχουμε $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow$ x=0 ή x=-2. Οπότε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x είναι (0,0) και (-2,0).

Η C_f για να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης θα τέμνει τον άξονα y΄y το πολύ σε ένα σημείο. Γνωρίζουμε ήδη ότι τον τέμνει στο (0,0), οπότε αυτό είναι και το μοναδικό σημείο τομής της C_f με τον y΄y.

iii. Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x όταν:

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x^2e^x+2xe^x<0 \Leftrightarrow e^x\left(x^2+2x\right)<0$$

Η $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε $x^2+2x<0 \underset{\alpha=1>0}{\overset{\text{ετερ.του}}{\Leftrightarrow}} x\in(-2,0)$.

iv. $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(x^2e^x+2xe^x\right)=4e^2+4e^2=8e^2$

Β. i. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x-2)}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}(x-2)=3$

ii.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{4-x}-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{\left(\sqrt{4-x}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(4+x-4)\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{(4-x-4)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{-x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{-\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=-1$$

Γ. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=\lambda$ πρέπει: $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x)=f(\lambda)(1)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to\lambda} f(x)=\lim_{x\to\lambda}\frac{x^2-3\lambda x+2\lambda^2}{x-\lambda}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\lambda}\frac{x^2-2\lambda x-\lambda x+2\lambda^2}{x-\lambda}=$$

$$\lim_{x\to\lambda}\frac{x(x-\lambda)-2\lambda(x-\lambda)}{x-\lambda}=\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)(x-2\lambda)}{x-\lambda}=$$

$$\lim_{x\to\lambda}(x-2\lambda)=-\lambda$$

Επίσης έχουμε ότι : $f(\lambda)=-\lambda$ οπότε από την (1) προκύπτει:
-λ=-λ που ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Θέμα 3ο:

Α. Έχουμε την συνάρτηση $f(x)=e^{3x}$.

i. Η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με:
$f'(x)=\left(e^{3x}\right)'=e^{3x}\cdot(3x)'=3e^{3x}$.

Ομοίως η f΄ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με:
$f''(x)=\left(3e^{3x}\right)'=3e^{3x}\cdot(3x)'=9e^{3x}$.

ii. Έχουμε: $3f'(x)-f''(x)=3\cdot 3e^{3x}-9e^{3x}=9e^{3x}-9e^{3x}=0$.

Β. Είναι $f(x)=\sqrt{1+6x}$

i. Η f ορίζεται όταν $1+6x\geq 0\Leftrightarrow 6x\geq -1\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{6}$.

Δηλαδή $A_f=\left[-\frac{1}{6},+\infty\right)$.

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι: $f'(x)=\left(\sqrt{1+6x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{1+6x}}\cdot(1+6x)'=\frac{6}{2\sqrt{1+6x}}=\frac{3}{\sqrt{1+6x}}$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=4$ είναι

$f'(4)=\frac{3}{\sqrt{1+6\cdot 4}}=\frac{3}{5}$.

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=4$ είναι:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\Leftrightarrow y-5=\frac{3}{5}(x-4)\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x-\frac{12}{5}+5\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{13}{5}$$

Η $y=\frac{3}{5}x+\frac{13}{5}$ τέμνει τον y΄y στο $\left(0,\frac{13}{5}\right)$.

iv. Έστω $M\left(x_0,f(x_0)\right)$ το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία ε:y=x+2. Τότε πρέπει:

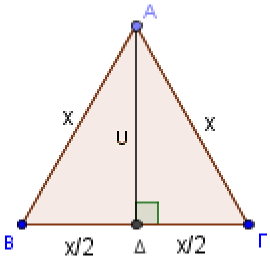
$$f'(x_0)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{1+6x_0}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{1+6x_0}=3 \Leftrightarrow$$

$1+6x_0=9 \Leftrightarrow 6x_0=8 \Leftrightarrow x_0=\frac{8}{6}$ δηλαδή $x_0=\frac{4}{3}$ άρα

$M\left(\frac{4}{3},\sqrt{1+6\frac{8}{6}}\right)$ οπότε $M\left(\frac{4}{3},3\right)$.

Θέμα 4ο:

Α. Έστω το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά x.



i. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ το οποίο είναι και διάμεσος, οπότε ΒΔ=ΔΓ=x/2. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$(\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{A\Delta})^2+(\Delta\Gamma)^2 \Leftrightarrow x^2=\upsilon^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\upsilon^2=x^2-\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \upsilon^2=\frac{3x^2}{4} \Leftrightarrow \upsilon=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Πρέπει $x>0$ και $\upsilon>0$ άρα $x>0$. Οπότε το ύψος ως συνάρτηση της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου είναι: $\upsilon(x)=\frac{x\sqrt{3}}{2},\ x>0$.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι: $E=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}=\frac{x\cdot\upsilon}{2}$. Όμως, έχουμε ότι

$\upsilon=\frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\upsilon=x\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{2\upsilon}{\sqrt{3}}$.

Επομένως,

$$E=\frac{\frac{2\upsilon}{\sqrt{3}}\cdot\upsilon}{2} \Leftrightarrow E=\frac{\upsilon^2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \upsilon^2=E\sqrt{3} \Leftrightarrow \upsilon=\sqrt{E\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{\sqrt{3E^2}} \Leftrightarrow \upsilon=\sqrt[4]{3E^2}.$$

Άρα το ύψος ως συνάρτηση του εμβαδού είναι: $\upsilon(E)=\sqrt[4]{3E^2}, E>0$.

Β. i. Ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι:

$$\upsilon'(E)=\left(\sqrt[4]{3E^2}\right)'=\left(\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{E^2}\right)'\overset{E>0}{=}\sqrt[4]{3}\cdot\left(\sqrt{E}\right)'=\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{E}}.$$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής του ύψους όταν Ε=2cm^2 είναι:

$$\upsilon'(2)=\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}.$$