ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

145

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Όλη **Γεν. Παιδείας**

30-03-14

<u>Θέμα 1ο :</u>

Α.i. Να διατυπώσετε το κριτήριο μονοτονίας . **(4 μον.)**

ii. Αν $x_1, x_2, ...x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ σ' ένα δείγμα μεγέθους ν , τότε τι εκφράζει η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i , $i = 1, 2, ..., \kappa$; **(3 μον.)**

iii. Να διατυπώσετε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας . **(5 μον.)**

iv. Έστω Α , Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.
Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. **(5 μον.)**

Β. Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = (x+1)^3$

ii. $g(x) = x^8 + 5x^3$

iii. $h(x) = e^x \cdot \eta\mu x$

iv. $\varphi(x) = 5x^4 + \ln 2$

v. $s(x) = \dfrac{x}{\eta\mu x}$ **(5x1=5 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις:

i. $\left[(fog)(x)\right]' = \left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot f'(x)$. **Σ Λ**

ii. Η μέση τιμή υπολογίζεται τόσο σε ποσοτικές όσο και σε ποιοτικές μεταβλητές . **Σ Λ**

iii. Για δύο ενδεχόμενα Α , Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A) \le P(A \cup B)$. **Σ Λ**

(3x1=3 μον.)

Θέμα 2ο:

Οι μαθητές μιας τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με το πόσα αδέρφια έχουν και από τις απαντήσεις τους προέκυψε ο παρακάτω πίνακας .

Αριθμός αδερφών x_i	Αριθμός μαθητών v_i
0	α
1	β
2	8
3	3

Οι αριθμοί α και β είναι οι τιμές του τοπικού ελαχίστου και του τοπικού μεγίστου αντίστοιχα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 7$.

Α. Να αποδείξετε ότι α=5 και β=9. **(8 μον.)**

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των αδερφών που έχουν οι μαθητές της τάξης . **(5 μον.)**

Γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο . **(5 μον.)**

Δ. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή από την τάξη .Αν γνωρίζουμε ότι στην τάξη δεν υπάρχουν αδέρφια να βρείτε :

i. Την πιθανότητα του ενδεχομένου : « Ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει το πολύ δύο αδέρφια» . **(4 μον.)**

ii. Την πιθανότητα του ενδεχομένου : « Η οικογένεια του μαθητή που επιλέξαμε να έχει τουλάχιστον δύο παιδιά» . **(3 μον.)**

Θέμα 3ο:

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές και θεωρούμε το ενδεχόμενο Α: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφαλή».

Α. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος και στη συνέχεια να υπολογίσετε την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α . **(8 μον.)**

Β. Αν $P(A) = \frac{3}{4}$, Ω ο δειγματικός χώρος του προηγούμενου πειράματος , $x \in \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ και δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων :

Τιμές της μεταβλητής y_i	Συχνότητες v_i
$2x^2P(A)$	3
$3x^2P(A')$	2
$xP(\Omega)$	3

i. Να υπολογίσετε (ως συνάρτηση του x) τη μέση τιμή $\bar{y}$ της μεταβλητής y . **(9 μον.)**

ii. Αν $\bar{y} = \dfrac{6x^2+3x}{8}$ να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \dfrac{1}{\bar{y}}$. **(8 μον.)**

<u>Θέμα 4º:</u>

Έστω $\Omega = \{0,1,2,\omega_1,\omega_2\}$ με $\omega_1 < \omega_2$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενο $A = \{\omega_1,\omega_2\}$, ώστε να ισχύουν : $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(0) = 2P(1) = \dfrac{P(2)}{2} = P(\omega_1)$.

Α. Να βρείτε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω. **(5 μον.)**

Β. Αν η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\alpha}{3}x^3 - 4x^2 + 15x - 1$ έχει εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 8x$ και τα ω_1,ω_2 είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της f , τότε να βρείτε τα α , ω_1,ω_2 . **(8 μον.)**

Γ. Για α=1 , ω_1=3 και ω_2=5 :

i. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$B = \left\{\lambda \in \Omega : \lim_{x\to 2}\frac{f''(x)+4}{\sqrt{3x-2}-2} = \lambda^2 - 5\lambda + \frac{26}{3}\right\} .$$ **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ: «δεν πραγματοποιείται κανένα από το Α και Β» . **(4 μον.)**

iii. Να δείξετε ότι $P(A-B) \le \dfrac{1}{2}$. **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα1ο:

A.i. •Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

• Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

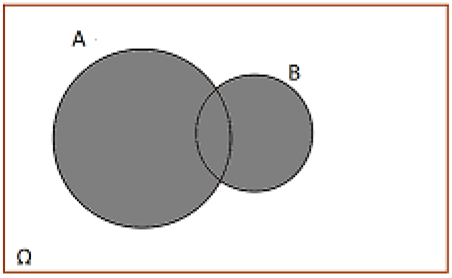
ii. Η αθροιστική συχνότητα N_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

iii. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα ενδεχόμενα και Α ένα ενδεχόμενο αυτού .Τότε ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α , τον αριθμό :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}$$

Είναι: $0 \le P(A) \le 1$ και $P(\Omega)=1$.

iv.



Για τα ενδεχόμενα Α και Β έχουμε:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$,Οπότε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$ Δηλαδή,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

B. i. $f'(x) = \left[(x+1)^3\right]' = 3(x+1)^2 (x+1)' = 3(x+1)^2$.

ii. $g'(x) = \left(x^8 + 5x^3\right)' = 8x^7 + 15x^2$.

iii. $h'(x) = \left(e^x \cdot ημx\right)' = \left(e^x\right)'ημx + e^x (ημx)' =$

$e^x ημx + e^x συνx = e^x (ημx + συνx)$.

iv. $\varphi'(x)=\left(5x^4+\ln 2\right)'=20x^3$.

v. $s'(x)=\left(\dfrac{x}{\eta\mu x}\right)'=\dfrac{(x)'\eta\mu x-x(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}=\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$.

Δ. i. Λ **ii.** Λ **iii.** Σ

<u>Θέμα 2$^{\text{ο}}$:</u>

Α. Η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+7$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πολυωνυμική.

Έχουμε: $f'(x)=\left(x^3-3x+7\right)'=3x^2-3, x\in\mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow 3\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$

Λύνουμε την ανίσωση: $f'(x)>0\Leftrightarrow 3x^2-3>0\overset{\text{ομ.του α}}{\Leftrightarrow} x<-1$ ή $x>1$.

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	-1		+1	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗
		T.M.		T.E.	

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=-1 το $f(-1)=-1+3+7=9$ και τοπικό ελάχιστο για x=1 το $f(1)=1-3+7=5$.

Άρα, **α=5** και **β=9** .

Β. Ο πίνακας συχνοτήτων γίνεται:

Αριθμός αδερφών x_i	**Αριθμός μαθητών ν_i**	**$x_i\nu_i$**	**N_i**
0	α	0	5
1	β	9	14
2	8	16	22
3	3	9	25
Σύνολο	25	34	-

Για τη μέση τιμή έχουμε: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \dfrac{34}{25} = 1{,}36$.

Γ. Για τη διάμεσο προσθέτουμε τη στήλη N_i στον πίνακα.
$N_1 = \nu_1$, $N_2 = N_1 + \nu_2$, κ.ο.κ.

Τότε, ν=25(περιττός) άρα $\delta = 13^{\eta}$ παρατήρηση $= 1$.

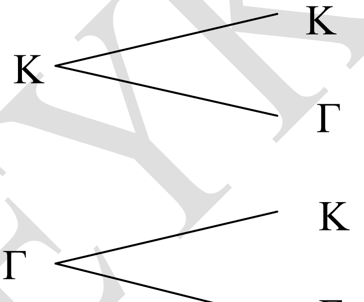
Δ. i. Έστω Α το ενδεχόμενο: «Ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει το πολύ δύο αδέρφια». Τότε Ν(Α)=N_3=22 και εφόσον τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, έχουμε ότι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{22}{25}$.

ii. Έστω Β το ενδεχόμενο: «Η οικογένεια του μαθητή να έχει τουλάχιστον δύο παιδιά». Εφόσον η οικογένεια έχει τουλάχιστον 2 παιδία, ο μαθητής θα έχει τουλάχιστον 1 αδερφό. Οπότε ,
N(B)=$\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 20$ άρα $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{25}$.

<u>Θέμα 3</u>

Α. Με δενδροδιάγραμμα έχουμε:

1^{η} ρίψη 2^{η} ρίψη



Τότε ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι:
$\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$.

Το ενδεχόμενο Α είναι $A = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$.

Τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, οπότε $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{4}$.

B. Είναι $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(A')=1-P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(\Omega)=1$. Οπότε:

Τιμές της μεταβλητής y_i	**Συχνότητες ν_i**	**$y_i\nu_i$**
$\frac{3x^2}{2}$	3	$\frac{9x^2}{2}$
$\frac{3x^2}{4}$	2	$\frac{3x^2}{2}$
x	3	3x
Σύνολο	8	$6x^2+3x$

i. Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{3}y_i\nu_i}{\nu}=\frac{6x^2+3x}{8}$$

ii. Είναι $f(x)=\frac{1}{\bar{y}}=\frac{1}{\frac{6x^2+3x}{8}}=\frac{8}{6x^2+3x}$.

Η f ορίζεται όταν $6x^2+3x\neq 0 \Leftrightarrow 3x(2x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq -\frac{1}{2}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή πολυωνυμική με:

$$f'(x)=\left(\frac{8}{6x^2+3x}\right)'=-\frac{8}{(6x^2+3x)^2}\cdot(6x^2+3x)'=-\frac{8(12x+3)}{(6x^2+3x)^2}=$$
$$-\frac{24(4x+1)}{(6x^2+3x)^2}.$$

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{24(4x+1)}{(6x^2+3x)^2}=0 \Leftrightarrow 4x+1=0$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}.$$

Λύνουμε την ανίσωση: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{24(4x+1)}{\left(6x^2+3x\right)^2} > 0 \overset{\left(6x^2+3x\right)^2>0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow -24(4x+1) > 0 \Leftrightarrow 4x+1<0 \Leftrightarrow 4x<-1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{4}.$$

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		0	$+\infty$
f'	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$
f	↗	‖	↗		↘	‖	↘
				Ο.Μ.			

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=-\dfrac{1}{4}$ το $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{64}{3}$.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\{0,1,2,\omega_1,\omega_2\}$ με $\omega_1<\omega_2$ και

$A=\{\omega_1,\omega_2\}$ με $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

Όμως, $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_2)$ άρα $P(\omega_1)+P(\omega_2)=\dfrac{1}{2}$ (1).

Επίσης, $P(0)=2P(1)=\dfrac{P(2)}{2}=P(\omega_1)$.

Οπότε, $P(0)=P(\omega_1), P(1)=\dfrac{P(\omega_1)}{2}, P(2)=2P(\omega_1)$.

Γνωρίζουμε ότι $P(\Omega)=1 \Leftrightarrow P(0)+P(1)+P(2)+P(\omega_1)+P(\omega_2)=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$P(\omega_1)+\frac{P(\omega_1)}{2}+2P(\omega_1)+\frac{1}{2}=1 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2P(\omega_1)+P(\omega_1)+4P(\omega_1)=2-1 \Leftrightarrow$$

$7P(\omega_1)=1 \Leftrightarrow \mathbf{P(\omega_1)=\dfrac{1}{7}}$.

Τότε, $P(\omega_2)=\dfrac{1}{2}-P(\omega_1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{7-2}{14} \Rightarrow \mathbf{P(\omega_2)=\dfrac{5}{14}}$.

Επίσης, $P(0)=P(\omega_1)$ άρα $\mathbf{P(0)=\dfrac{1}{7}}$.

$P(1)=\dfrac{P(\omega_1)}{2}$ άρα $\mathbf{P(1)=\dfrac{1}{14}}$.

$P(2)=2P(\omega_1)$ οπότε έχουμε $\mathbf{P(2)=\dfrac{2}{7}}$.

Β. Η $f(x)=\dfrac{\alpha}{3}x^3-4x^2+15x-1$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=\alpha x^2-8x+15$. Εφόσον η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $x_0=1$ που είναι παράλληλη στην $y=8x$, θα είναι $f'(1)=8 \Leftrightarrow \alpha-8+15=8 \Leftrightarrow$ **α=1**.

Για α=1 είναι $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x^2+15x-1$ και $f'(x)=x^2-8x+15$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=5$.

Λύνουμε την ανίσωση: $f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-8x+15>0 \overset{\text{ομ.τουα}}{\Leftrightarrow} x<3$ ή $x>5$.

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	3		5	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Τα ω_1,ω_2 είναι οι θέσεις των ακρότατων της f δηλαδή το 3 και το 5 και εφόσον $\omega_1<\omega_2$ είναι $\boldsymbol{\omega_1=3}$ και $\boldsymbol{\omega_2=5}$.

Γ. Είναι $\Omega=\{0,1,2,3,5\}$.

i. Για το ενδεχόμενο Β έχουμε:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(x^2-8x+15\right)'=2x-8$$

Οπότε:
$$\lim_{x\to 2}\frac{f''(x)+4}{\sqrt{3x-2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-8+4}{\sqrt{3x-2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\sqrt{3x-2}-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3x-2-4}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3}=\frac{8}{3}.$$

Είναι $\lambda^2-5\lambda+\frac{26}{3}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+\frac{18}{3}=0\Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0\Leftrightarrow$

λ=2 ή **λ=3**.

Οπότε, $B=\{\lambda\in\Omega\,/\,\lambda=2 \text{ ή } \lambda=3\}=\{2,3\}$.

Τότε: P(B)=P(2)+P(3)=$\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$.

ii. Είναι $A=\{3,5\}$ και $B=\{2,3\}$, $A\cup B=\{2,3,5\}$.

Οπότε $(A\cup B)'=\{0,1\}$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P\left[(A\cup B)'\right]=P(0)+P(1)=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{3}{14}.$$

iii. Είναι $P(A-B)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-P(A\cap B)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$P(A\cap B)\ge 0$ που ισχύει.