ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **145**

Υλη:Μιγαδικοί-Συναρτήσεις-Όρια

Γ'Λυκείου **7-10-12**

Ον/μο:……………….. **Θετ-Τεχν.**

ΖΗΤΗΜΑ 1^0

Α.1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **(Μον.5)**

2. Αν $z \in C$ να αποδείξετε ότι $\left|z^\nu\right| = |z|^\nu, \nu \in N$ **(Μον.5)**

3. Πως ερμηνεύεται γεωμετρικά το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 ; **(Μον.5)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ **Σ Λ**
2. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$ **Σ Λ**
3. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ **Σ Λ**
4. Ο αριθμός $3 + i^4$ δεν είναι πραγματικός . **Σ Λ**
5. $|z_1 + z_2|^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2, \quad z_1, z_2 \in C$ **Σ Λ**
6. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2\nu} = (-1)^\nu$ **Σ Λ**
7. $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[(x-\alpha)^3 \cdot f(x)\right] = 0$ **Σ Λ**
8. Αν η f είναι «1-1» τότε η C_f τέμνει τον x΄x σε ένα σημείο **Σ Λ**
9. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ τότε

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ **Σ Λ**
10. Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων τέμνονται στην ευθεία y=x **Σ Λ**

(Μον.10)

ΖΗΤΗΜΑ 2^0

Δύο κινητά Α και Β κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο .Το Α είναι εικόνα του z ,για τον οποίο ισχύει $|z|=10$, ενώ το Β είναι εικόνα του w , για τον οποίο ισχύει $z=(1+i\sqrt{3})\cdot w$

1. Να δείξετε ότι $z^3+8w^3=0$ **(Μον.6)**
2. Να βρείτε την καμπύλη στην οποία κινείται το Β **(Μον.7)**
3. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των δύο κινητών είναι σταθερή . **(Μον.6)**
4. Όταν το κινητό Α βρίσκεται στον ημιάξονα Οy , τότε που βρίσκεται το Β ; **(Μον.6)**

ΖΗΤΗΜΑ 3^0

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί
$z_1=1-i,\quad z_2=1+i,\quad z=x\cdot z_1+\eta\mu x\cdot z_2,\quad x\in R$ και η
συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|z|^2}{z_1\cdot z_2\cdot x^2}$. Να υπολογίσετε τα όρια :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **(Μον.15)**

Β. Έστω z_1,z_2 ρίζες της $z^2+\alpha z+\beta=0,\quad \alpha,\beta\in R$
Αν $|z_1|=\sqrt{13}$ και $\text{Re}(z_2)=3$ τότε :

1. Να βρείτε τους α, β και της ρίζες της εξίσωσης

2. Να δείξετε ότι $z_1^\nu+z_2^\nu\in R$, για κάθε $\nu\in N$ **(Μον.10)**

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4^0</u>

Α. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha\cdot\beta\neq 0$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)\neq 0$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$, $w=\beta-if(\beta)$ για τους οποίους ισχύει : $|\overline{w}+z|=|w-\overline{z}|$

1. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $w\cdot z$ είναι φανταστικός. **(Μον.5)**

2. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(\alpha)\cdot x^3-f(\beta)\cdot x+5}{f(\beta)\cdot x^2+f(\alpha)\cdot x-3}$ **(Μον.5)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x-|z|}-|z|,\ z\in C$.

1.Να δείξετε ότι αντιστρέφεται

2.Αν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ(z).

3.Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $5|z_1-z_2|-8\leq 0$.

(Μον.3x5=15)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΖΗΤΗΜΑ 1^0

A. 1. Έχουμε : $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow$
$(z_1 \cdot z_2) \cdot \left(\overline{z_1 z_2}\right) = z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}$ **,**
ισχύει .

2. Ξέρουμε ότι $|z_1 \cdot z_2 \ldots\ldots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_\nu|$ και αν
$z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z$ η ισότητα γίνεται :
$|z \cdot z \ldots\ldots z| = |z| \cdot |z| \ldots\ldots |z| \Leftrightarrow \left|z^\nu\right| = |z|^\nu$.

3. Αν $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$, το μέτρο της διαφοράς των μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους δηλ.
$(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$.

B. **1.**Σ , **2.**Λ , **3.**Σ , **4.**Λ , **5.**Λ , **6.**Σ , **7.**Λ , **8.**Λ , **9.**Σ , **10.**Λ .

ΖΗΤΗΜΑ 2^0

1. Είναι :
$z^3 = (1 + i\sqrt{3})^3 \cdot w^3 = \left[1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot \left(i\sqrt{3}\right)^2 + \left(i\sqrt{3}\right)^3\right] \cdot w^3$
$= \left(1 + 3\sqrt{3} \cdot i - 3 \cdot 3 - 3i\sqrt{3}\right) w^3 = -8w^3$ άρα $z^3 + 8w^3 = 0$.

2. Από την ισότητα $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right) w$ έχουμε $|z| = \left|(1 + i\sqrt{3})w\right| \Leftrightarrow$
$10 = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \cdot |w| \Leftrightarrow 10 = 2|w| \Leftrightarrow |w| = 5$ **.** Άρα το $B(w)$ κινείται σε κύκλο κέντρου $0(0,0)$ και ακτίνας $\rho=5$.

3. Έχουμε : $|z - w| = \left|(1 + i\sqrt{3})w - w\right| = \left|(1 + i\sqrt{3} - 1)w\right| =$
$= \left|i\sqrt{3}\right| \cdot |w| = \sqrt{3} \cdot 5$, σταθερή .

4. Όταν το Α είναι στον Oy ο z είναι $z = 10i$ οπότε έχουμε :

$$10i = \left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot w \Leftrightarrow w = \frac{10i}{1+i\sqrt{3}} =$$

$$\frac{10i(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{10i+10\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{10(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{5(\sqrt{3}+i)}{2} \text{ δηλ.}$$

$w = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$ οπότε το B(w) βρίσκεται στη θέση $B\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 3^0</u>

Α. Είναι $z = x\cdot(1-i) + \eta\mu x\cdot(1+i) = x - xi + \eta\mu x + \eta\mu x\cdot i \Rightarrow$

$z = \left(x+\eta\mu x\right) + (\eta\mu x - x)i$ οπότε $|z|^2 = (x+\eta\mu x)^2 + (\eta\mu x - x)^2 =$

$= x^2 + 2x\eta\mu x + \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x - 2x\eta\mu x + x^2 = 2(x^2 + \eta\mu^2 x)$.

Επίσης $z_1\cdot z_2 = (1-i)(1+i) = 2$.

Η συνάρτηση είναι η $f(x) = \frac{|z|^2}{z_1 z_2\cdot x^2} = \frac{2(x^2+\eta\mu^2 x)}{2\cdot x^2} \Rightarrow$

$f(x) = 1 + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$.

Είναι :

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] = 1+0=1$

2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] = 1+1^2=2$

3. Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y)$ αν όπου $\frac{1}{x}\to y$. Οταν $x\to+\infty$ τότε

$y\to 0$.Έτσι : $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} f(y) \overset{(2)}{=} 2$.

Β. 1. Οι ρίζες z_1 και z_2 είναι συζυγείς επειδή η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές . Από τους τύπους Vieta έχουμε:

- $z_1 + z_2 = -\alpha \Leftrightarrow z_2 + \overline{z_2} = -\alpha \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z_2) = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = -6$
- $z_1 \cdot z_2 = \beta \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = \beta \Leftrightarrow |z_1|^2 = \beta \Leftrightarrow \sqrt{13}^2 = \beta$ άρα $\beta = 13$

Η εξίσωση γράφεται $z^2 - 6z + 13 = 0$ και έχει

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16$ και ρίζες

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm i \cdot 4}{2} \text{ δηλ } z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 3 - 2i$$

2. Είναι $z_1^\nu + z_2^\nu = z_1^\nu + \overline{z_1}^\nu = z_1^\nu + \overline{z_1^\nu} \in R$ ως άθροισμα συζυγών .

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4^0</u>

Α. 1. Έχουμε $|\overline{w} + z| = |w - \overline{z}| \Leftrightarrow |\overline{w} + z|^2 = |w - \overline{z}|^2 \Leftrightarrow$

$(\overline{w} + z) \cdot (w + \overline{z}) = (w - \overline{z}) \cdot (\overline{w} - z) \Leftrightarrow$

$\overline{w}w + \overline{w}\overline{z} + zw + z\overline{z} = w\overline{w} - wz - \overline{z}\overline{w} + \overline{z}z \Leftrightarrow$

$2zw = -2\overline{z}\overline{w} \Leftrightarrow zw = -\overline{zw} \Leftrightarrow zw \in I$

2. Ο $z \cdot w$ είναι ο $zw = (\alpha^2 + if(\alpha)) \cdot (\beta^2 - if(\beta)) =$

$= \alpha^2\beta^2 - \alpha^2 f(\beta)i + \beta^2 f(\alpha)i + f(\alpha)f(\beta) =$

$= (\alpha^2\beta^2 + f(\alpha) \cdot f(\beta)) + (\beta^2 f(\alpha) - \alpha^2 f(\beta)) \cdot i$

Επειδή $zw \in I$ είναι $\alpha^2\beta^2 + f(\alpha) \cdot f(\beta) = 0 \Leftrightarrow$

$f(\alpha) \cdot f(\beta) = -\alpha^2\beta^2 < 0$, αφού $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Είναι λοιπόν :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(\alpha)x^3 - f(\beta)x + 5}{f(\beta)x^2 + f(\alpha)x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(\alpha) \cdot x^3}{f(\beta) \cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \cdot x \right) = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \cdot (-\infty) = +\infty$$

B. Για την f πρέπει $4x-|z|\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{|z|}{4}$ δηλαδή $A=[\frac{|z|}{4},+\infty)$

1.Αν $x_1,x_2 \in A$ $x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1-|z|<4x_2-|z| \Rightarrow$
$\sqrt{4x_1-|z|}<\sqrt{4x_2-|z|} \Rightarrow \sqrt{4x_1-|z|}-|z|\le \sqrt{4x_2-|z|}-|z| \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α. Επομένως αντιστρέφεται.

2.Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, τα όποια κοινά σημεία των C_f και C_f^{-1}, θα βρίσκονται στη διχοτόμο y=x της χΟy.

Από την εξίσωση f(x)=x έχουμε:

$$\sqrt{4x-|z|}-|z|=x \Leftrightarrow \sqrt{4x-|z|}=x+|z| \Leftrightarrow \sqrt{4x-|z|}^2=(x+|z|)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x-|z|=x^2+2|z|x+|z|^2 \Leftrightarrow x^2+(2|z|-4)x+|z|^2+|z|=0 \quad (1)$$

επειδή οι C_f και C_f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, η (1) πρέπει να έχει μία λύση, άρα πρέπει Δ=0 δηλ.

$$(2|z|-4)^2-4(|z|^2+|z|)=0 \Leftrightarrow 4|z|^2-16|z|+16-4|z|^2-4|z|=0 \Leftrightarrow$$

$$20|z|=16 \Leftrightarrow |z|=\frac{4}{5}.$$

Ο γεωμετρικός τόπος λοιπόν των M(Z) είναι κύκλος κέντρου O(0,0) και $\rho=\frac{4}{5}$

3. Είναι $|z_1-z_2|=(M_1M_2)\le 2\frac{4}{5}$ άρα $|z_1-z_2|\le\frac{8}{5} \Leftrightarrow 5|z_1-z_2|\le 8$.