ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

144

Ον/μο:…….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Συναρτήσεις-Στατιστική **Γεν. Παιδείας**

02-02-14

Θέμα 1ο :

Α. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α .Πως ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f; **(6 μον.)**

Β. i. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός δείγματος , ν παρατηρήσεων περιττού πλήθους . **(4 μον.)**

ii. Αν $w_1, w_2, ..., w_\nu$, είναι οι συντελεστές βαρύτητας , ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$, μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ , να δώσετε τον ορισμό του σταθμικού μέσου της μεταβλητής Χ . **(4 μον.)**

Γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c είναι μια πραγματική σταθερά , να δείξετε ότι : $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. **(6 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σ**ωστό ή **(Λ) Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν μία συνάρτηση δεν είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα, τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό . **Σ** **Λ**

ii. $\left(συν^3 2x\right)' = -6συν^2 2x \cdot ημ2x$ **Σ** **Λ**

iii. Σε μια κανονική κατανομή το ποσοστό παρατηρήσεων που βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s\right)$ είναι 95%. **Σ** **Λ**

iv. Τα δείγματα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ και $cx_1, cx_2, ..., cx_\nu$ με c>0 , έχουν τον ίδιο συντελεστή μεταβολής . **Σ** **Λ**

v. Το χρονόγραμμα χρησιμοποιείται για την απεικόνιση ποιοτικών μεταβλητών . **Σ** **Λ**

(5x1=5 μον.)

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 2ο:

Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες που κατασκευάζει ένα εργοστάσιο μια ορισμένη ημέρα έχουν μέση διάρκεια ζωής 2000 ώρες και συντελεστή μεταβολής 5% .

Α. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση του δείγματος . **(5 μον.)**

Β. Αν ισχύει $\Sigma t_i^2 = 2807 \cdot 10^6$, να δείξετε ότι το πλήθος των λαμπτήρων είναι 700 . **(7 μον.)**

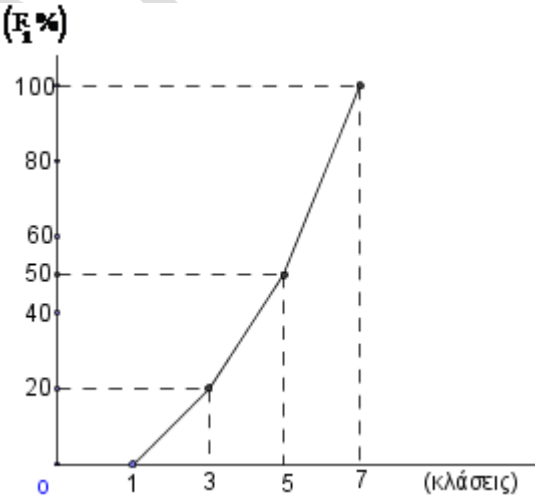
Γ. Αν υποθέσουμε ότι για το παραπάνω δείγμα έχουμε κανονική κατανομή και το πλήθος των λαμπτήρων είναι 1000 , τότε να βρείτε το πλήθος των λαμπτήρων οι οποίοι έχουν διάρκεια ζωής:

i. Από 1900 ώρες έως 2000 ώρες . **(6 μον.)**

ii. Τουλάχιστον 1800 ώρες . **(7 μον.)**

Θέμα 3ο:

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων(%) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων σε ομαδοποίηση.



Α. Να βρείτε :

i. τη διάμεσο δ ,

ii. το εύρος R ,

iii. τη μέση τιμή $\bar{x}$,

iv. τη διακύμανση s^2 .

(4x3=12 μον.)

Β. Να φτιάξετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα . **(6 μον.)**

Γ. Αν για τις κεντρικές τιμές x_1, x_2, x_3 των παραπάνω κλάσεων ισχύει ότι $\Sigma x_i^2 \cdot v_i = 1180$ να βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων . **(7 μον.)**

Θέμα 4ο:

Από ένα σχολείο εκλέγονται 7 μαθητές , 4 αγόρια και 3 κορίτσια, για να τρέξουν σε έναν αγώνα 100 μέτρων .Ο μέσος χρόνος των αγοριών είναι $\bar{\alpha}$ (σε sec) και η τυπική απόκλιση s_1(σε sec) , ενώ των κοριτσιών είναι $\bar{\kappa}$ (σε sec) , και η τυπική απόκλιση s_2(σε sec) .

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Α. Αν $\bar{\mu}$ είναι ο μέσος χρόνος και των 7 μαθητών , τότε :

i.Να εκφράσετε το κλάσμα $\Pi = \dfrac{\left(\bar{\mu}\right)^2}{\left(\bar{\alpha}\right)^2 + \left(\bar{\kappa}\right)^2}$ σαν συνάρτηση $f(x)$ του $x = \dfrac{\bar{\alpha}}{\kappa}$. **(6 μον.)**

ii. Αν $\Pi(x) = \dfrac{1}{49} \cdot \dfrac{(4x+3)^2}{x^2+1}$ τότε να βρείτε το μέγιστο του κλάσματος Π. **(8 μον.)**

Β. Αν s είναι η τυπική απόκλιση και των 7 μαθητών , να αποδείξετε ότι $s^2 \geq \dfrac{4s_1^2 + 3s_2^2}{7}$ (1) . Πότε ισχύει η ισότητα ; **(6 μον.)**

Γ. Αν στη σχέση (1) του ερωτήματος Β ισχύει η ισότητα και τα δείγματα των χρόνων των αγοριών και των κοριτσιών είναι ομοιογενή , να αποδείξετε ότι και το δείγμα των 7 μαθητών είναι ομοιογενές . **(5 μον.)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα1ο:

Α. Αν Β είναι το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση , με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f΄

Β. i. Διάμεσος δ ενός δείγματος , ν παρατηρήσεων περιττού πλήθους, που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά , ορίζεται ως η μεσαία τους παρατήρηση .

ii. Αν $w_1, w_2, ..., w_\nu$, είναι οι συντελεστές βαρύτητας , ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$, μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε ο σταθμικός μέσος ορίζεται ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} w_i}$$

Γ. Έστω $F(x) = c\cdot f(x)$

Τότε $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} c\cdot \frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} = c\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= c\cdot f'(x) .$$

Άρα $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$

Δ. i. Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.**Λ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 2ο:

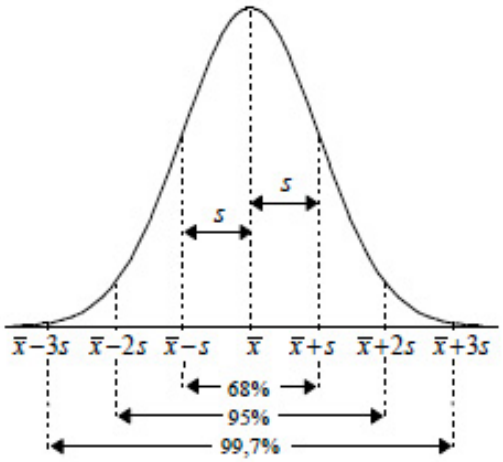
Α. Είναι $CV = \frac{5}{100} \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5}{100} \Leftrightarrow \frac{s}{2000} = \frac{5}{100} \Leftrightarrow s = 100$

Β. Γνωρίζουμε ότι : $s^2 = \frac{1}{v}\left\{\Sigma t_i^2 - \frac{(\Sigma t_i)^2}{v}\right\} \Leftrightarrow s^2 = \frac{\Sigma t_i^2}{v} - \left(\frac{\Sigma t_i}{v}\right)^2 \Leftrightarrow$

$s^2 = \frac{\Sigma t_i^2}{v} - \left(\bar{x}\right)^2 \Leftrightarrow 100^2 = \frac{2807 \cdot 10^6}{v} - (2000)^2 \Leftrightarrow$

$\frac{2807 \cdot 10^6}{v} = 4010 \cdot 10^3 \Leftrightarrow v = \frac{2807 \cdot 10^6}{4010 \cdot 10^3} \Leftrightarrow v = 0,7 \cdot 10^3 \Leftrightarrow v = 700$

Γ. Εφόσον η κατανομή των λαμπτήρων είναι κανονική έχουμε :



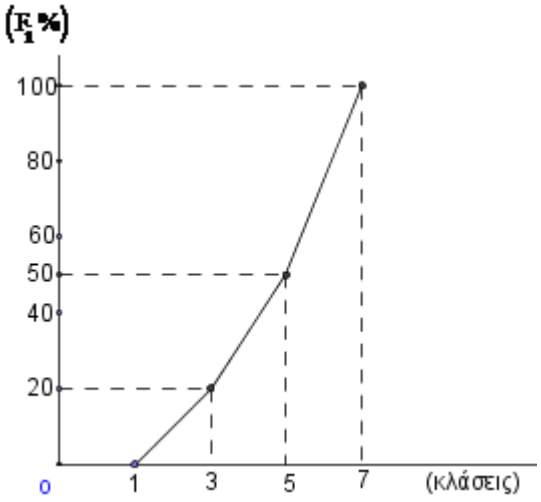
i. Το πλήθος των λαμπτήρων που έχουν διάρκεια ζωής από 1900 ώρες έως 2000 ώρες είναι : $\frac{68}{2}\% \cdot 1000 = \frac{34}{100} \cdot 1000 = 340$ λαμπτήρες .

ii. Το πλήθος των λαμπτήρων που έχουν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 1800 ώρες είναι : $\left(50\% + \frac{95}{2}\%\right) \cdot 1000 = \frac{97,5}{100} \cdot 1000 = 975$ λαμπτήρες.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 3ο:

Α.



i. Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων (%) έχουμε δ=5

ii. Είναι $R = X_{max} - X_{min} = 7 - 1 = 6$

iii. Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων :

Κλάσεις	x_i	F_i%	F_i%	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	α_i
$[1,3)$	2	20	20	0,2	0,4	0,8	72°
$[3,5)$	4	50	30	0,3	1,2	4,8	108°
$[5,7)$	6	100	50	0,5	3	18	180°
Σύνολο	-	-	100	1	4,6	23,6	360°

Είναι $f_1\% = F_1\% = 20\%$, $f_2\% = F_2\% - F_1\% = 30\%$,
$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 50\%$ $f_i = f_i\% : 100$.

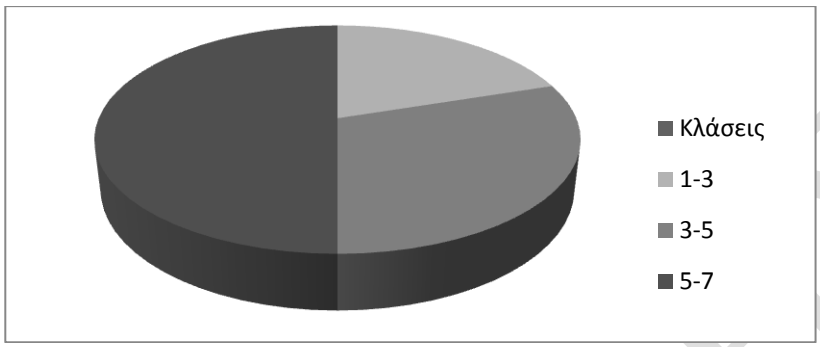
Έχουμε : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i f_i = 4,6$.

iv. Για τη διακύμανση s^2 έχουμε :

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{3} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{3} x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i^2 v_i}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{3} x_i v_i}{v}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 f_i - \left(\bar{x}\right)^2 = 23,6 - (4,6)^2 = 23,6 - 21,16 = 2,44.$$

Β. Για το κυκλικό διάγραμμα βρίσκουμε τις γωνίες $\alpha_i = 360^\circ f_i$



Γ. Είναι $\Sigma x_i^2 v_i = 1180 \Leftrightarrow x_1^2 v_1 + x_2^2 v_2 + x_3^2 v_3 = 1180 \overset{:v}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{x_1^2 v_1}{v} + \frac{x_2^2 v_2}{v} + \frac{x_3^2 v_3}{v} = \frac{1180}{v} \Leftrightarrow x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + x_3^2 f_3 = \frac{1180}{v} \Leftrightarrow$$

$$23,6 = \frac{1180}{v} \Leftrightarrow 23,6v = 1180 \Leftrightarrow \boxed{v=50}$$

Θέμα 4ο:

Α. i. Έχουμε ότι $\bar{\mu} = \dfrac{4\bar{\alpha} + 3\bar{\kappa}}{7}$.

$$\text{Τότε } \Pi = \frac{\left(\bar{\mu}\right)^2}{\left(\bar{\alpha}\right) + \left(\bar{\kappa}\right)^2} = \frac{\left(\dfrac{4\bar{\alpha} + 3\bar{\kappa}}{7}\right)^2}{\left(\bar{\alpha}\right)^2 + \left(\bar{\kappa}\right)^2} = \frac{1}{49} \cdot \frac{\left(4\bar{\alpha} + 3\bar{\kappa}\right)^2}{\left(\bar{\alpha}\right)^2 + \left(\bar{\kappa}\right)^2} \overset{:(\bar{\kappa})^2}{=}$$

$$= \frac{1}{49} \cdot \frac{\left(4\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\kappa}} + 3\right)^2}{\left(\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\kappa}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{49} \cdot \frac{(4x+3)^2}{x^2+1} = \Pi(x) \text{ , } x>0 \text{ εφόσον } x = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\kappa}}.$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ii. Έχουμε $\Pi(x)=\frac{1}{49}\cdot\frac{(4x+3)^2}{x^2+1}$.Βρίσκουμε την παράγωγο της Π.

$$\Pi'(x)=\frac{1}{49}\cdot\frac{2(4x+3)\cdot 4(x^2+1)-(4x+3)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2(4x+3)\left[4(x^2+1)-x(4x+3)\right]}{49(x^2+1)^2}=\frac{2(4x+3)(4-3x)}{49(x^2+1)^2},\ x>0$$

Λύνουμε την εξίσωση : $\Pi'(x)=0\Leftrightarrow 2(4x+3)(4-3x)=0\Leftrightarrow$

$4x+3=0$ ή $4-3x=0$ δηλ. $x=-\frac{3}{4}$ απορ. ή $x=\frac{4}{3}$

Λύνουμε την ανίσωση $\Pi'(x)>0\Rightarrow 2(4x+3)(4-3x)>0 \overset{\text{ετερ.του}}{\underset{\alpha}{\Rightarrow}}$

$x\in\left(-\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right)$.Όμως x>0 άρα $x\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$

Ο πίνακας προσήμων της Π΄ είναι :

x	0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Π'	‖	+	0	-	
Π	‖	↗		↘	

Ο.Μ

Η Π παρουσιάζει μέγιστο για $x=\frac{4}{3}$ το

$$\Pi\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{49}\cdot\frac{\left(4\cdot\frac{4}{3}+3\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1}=\frac{25}{49}.$$

Β. Έστω ότι οι χρόνοι των αγοριών και των κοριτσιών είναι αντίστοιχα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ και $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4$.Από την υπόθεση έχουμε ότι : $\bar{\alpha}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4}$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

$$\text{Οπότε , } s_1^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{4}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{4}t_i\right)}{\nu}\right\}=\frac{\Sigma t_i^2}{4}-\left(\bar{\alpha}\right)^2\Rightarrow$$

$$s_1^2=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2}{4}-\left(\bar{\alpha}\right)^2\Leftrightarrow\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=4s_1^2+4\bar{\alpha}^2\ (1)$$

$$\text{Ομοίως , } \bar{\kappa}=\frac{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3}{3}\ \text{και}\ s_2^2=\frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2}{3}-\left(\bar{\kappa}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2=3s_2^2+3\bar{\kappa}^2\quad(2)$$

$$\text{Τότε : } s^2=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2}{7}-\left(\bar{\mu}\right)\overset{(1)(2)}{\underset{\text{Α'ερώτημα}}{\Leftrightarrow}}$$

$$s^2=\frac{4s_1^2+4\bar{\alpha}^2+3s_2^2+3\bar{\kappa}^2}{7}-\left(\frac{4\bar{\alpha}+3\bar{\kappa}}{7}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{4s_1^2+3s_2^2}{7}+\frac{4\bar{\alpha}^2+3\bar{\kappa}^2}{7}-\frac{16\bar{\alpha}^2+24\bar{\alpha}\bar{\kappa}+9\bar{\kappa}^2}{49}\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{4s_1^2+3s_2^2}{7}+\frac{28\bar{\alpha}^2+21\kappa^2-16\bar{\alpha}^2-24\bar{\alpha}\bar{\kappa}-9\bar{\kappa}^2}{49}\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{4s_1^2+3s_2^3}{7}+\frac{12\bar{\alpha}^2+12\bar{\kappa}^2-24\bar{\alpha}\bar{\kappa}}{49}\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{4s_1^2+3s_2^2}{7}+\frac{12\left(\bar{\alpha}-\bar{\kappa}\right)^2}{49}$$

$$\text{Οπότε } s^2\geq\frac{4s_1^2+3s_2^2}{7}$$

$$\text{Η ισότητα ισχύει όταν } \frac{12\left(\bar{\alpha}-\bar{\kappa}\right)^2}{49}=0\Leftrightarrow\bar{\alpha}=\bar{\kappa}.$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Γ. Έχουμε ότι $\bar{\alpha}=\bar{\kappa}$ και ότι $CV_\alpha \le 10\%$ και $CV_\kappa \le 10\%$.

Άρα $\frac{s_1}{\alpha} \le \frac{10}{100} \Leftrightarrow s_1 \le \frac{\bar{\alpha}}{10}$ και ομοίως $s_2 \le \frac{\bar{\kappa}}{10}$.

Άρα $s^2 = \frac{4s_1^2+3s_2^2}{7} \le \frac{4\left(\frac{\bar{\alpha}}{10}\right)^2+3\left(\frac{\bar{\kappa}}{10}\right)^2}{7} \overset{\bar{\alpha}=\bar{\kappa}}{=} \frac{\bar{\alpha}^2}{100} \Leftrightarrow$

$$s^2 \le \left(\frac{\bar{\alpha}}{10}\right)^2 \Leftrightarrow s \le \frac{\bar{\alpha}}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{\mu} \le \frac{\bar{\alpha}}{10\mu} \Leftrightarrow \frac{s}{\mu} \le \frac{\bar{\alpha}}{10\cdot\frac{3\alpha+4\kappa}{7}} \overset{\bar{\alpha}=\bar{\kappa}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{s}{\mu} \le \frac{\bar{\alpha}}{10\alpha} \Leftrightarrow \frac{s}{\mu} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow CV \le 10\%.$$

Οπότε το δείγμα των 7 μαθητών είναι ομοιογενές .

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ