ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 143

Υλη: Συναρτήσεις

Γ'Λυκείου 6-05-12

Ον/μο:……………….. Θετ-Τεχν.

<u>ΖΗΤΗΜΑ 1^0</u>

Α. Έστω Α ένα υποσύνολο του R .Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α ; **(Μον.4)**

Β. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ; **(Μον.4)**

Γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες x0y και x΄0y΄ **(Μον.7)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. Η συνάρτηση $f(x)=2^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R **Σ Λ**

2. Η C_f συνάρτησης f τέμνει τον y΄y σε ένα σημείο **Σ Λ**

3. Οι λύσεις της ανίσωσης f(x)>g(x) δίνουν τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g **Σ Λ**

4. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ έχει C_f με άξονα συμμετρίας τον y΄y **Σ Λ**

5. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της είναι "1-1" **Σ Λ**

6. Αν στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f περιέχεται το μηδέν , η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα . **Σ Λ**

7. Αν το σύνολο τιμών συνάρτησης f είναι κλειστό διάστημα , η f έχει (ολικά) ακρότατα **Σ Λ**

8. Ισχύει fog=gof **Σ Λ**

9. Αν η f αντιστρέφεται τότε η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον x΄x το πολύ σ ΄ένα σημείο . **Σ Λ**

10. Είναι $f(f^{-1}(x)=x$, για κάθε $x\in A_f$ **Σ Λ**

(Μον.10)

ΖΗΤΗΜΑ 2^0

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και g(x)=2-x

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων **(Μον. 5)**

ii) Να ορισθεί η συνάρτηση fog **(Μον. 7)**

iii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται να βρείτε την f^{-1}. **(Μον. 6)**

iv) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της fofog **(Μον. 6)**

ΖΗΤΗΜΑ 3^0

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-8$

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται **(Μον.3)**

ii) Να υπολογίσετε τα $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(-6)$ **(Μον.3)**

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ **(Μον.3)**

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-8)=-6$ **(Μον.3)**

v) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\log x^2)\le 2$ **(Μον.3)**

Β. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ \sqrt{x-1}, & x\ge 1\end{cases}$$ **(Μον.10)**

ΖΗΤΗΜΑ 4^0

Α. Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση τέμνει τον x΄x στο σημείο Α(-2,0) .

i) Να βρείτε το πρόσημο της f **(Μον.4)**

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-3x-2)=0$ **(Μον.4)**

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{2x})=f(3e^x-2)$ **(Μον.4)**

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(\log^2 x-3)\le 0$ **(Μον.4)**

Β. α) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f:A\to R$ είναι γνησίως αύξουσα και η $g:A\to R$ γνησίως φθίνουσα τότε η συνάρτηση f-g είναι γνησίως αύξουσα . **(Μον.5)**

β)i) Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f(x)=x^3+2^x-3$ και $g(x)=8-x^5-7^x$ **(Μον.4)**

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g και τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g. **(Μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΖΗΤΗΜΑ 1^0

Α. Θεωρία **Β.** Θεωρία **Γ.** Θεωρία

Δ. 1Σ , 2Λ , 3Λ , 4Σ , 5Σ , 6Σ , 7Σ , 8Λ , 9Σ , 10Λ

ΖΗΤΗΜΑ 2^0

i) Για την $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ πρέπει $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ δηλ $A_f=[-1,+\infty)$

Η g(x)=2-x έχει A_g=R

ii) Η fog ορίζεται για τα x για τα οποία ισχύει :

$$\left.\begin{matrix} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\in R \\ 2-x\geq -1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{matrix} x\in R \\ x\leq 3 \end{matrix}$$ δηλ $A_{fog}=(-\infty,3]$ και ο τύπος

της είναι $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{-x+3}-1$

iii) Η εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=y+1 \overset{y\geq -1}{\Leftrightarrow}$

$x+1=(y+1)^2 \Leftrightarrow x+1=y^2+2y+1 \Leftrightarrow x=y^2+2y$, μοναδική λύση

$\forall y$ στο $f(A)=[-1,+\infty)$. Η f λοιπόν είναι «1-1» άρα αντιστρέφεται .

Η f^{-1} έχει π.ο το $f(A)=[-1,+\infty)$ και τύπο $f^{-1}(x)=x^2+2x$

iv) Η g(x)=2-x είναι γνησίως φθίνουσα .

Για την f έχουμε: $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow$

$\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+1} \Rightarrow \sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα .

Είναι $fofog=fo(fog)$ και ορίζεται για τα

$$\left.\begin{matrix} x\in A_{fog} \\ (fog)(x)\in A_f \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\leq 3 \\ \sqrt{3-x}-1\geq -1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{matrix} x\leq 3 \\ \sqrt{3-x}\geq 0 \end{matrix}$$ δηλ $x\leq 3$.

Άρα $A_{fofog}=(-\infty,3]$ και $\forall x_1,x_2$ σ' αυτό με

$x_1<x_2 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x_1)>g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(g(x_1))>f(g(x_2)) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$

$f(f(g(x_1))>f(f(g(x_2)) \Rightarrow (fofog)(x_1)>(fofog)(x_2)$

Άρα η fofog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 3^0</u>

A. Η $f(x)=x^3+x-8$ έχει πεδίο ορισμού A=R

i) Έστω $x_1<x_2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1^3<x_2^3 \\ x_1-8<x_2-8 \end{matrix}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^3+x_1-8<x_2^3+x_2-8 \Rightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα επομένως αντιστρέφεται

ii) είναι $f(2)=2 \Rightarrow f^{-1}(f(2))=f^{-1}(2) \Rightarrow 2=f^{-1}(2)$

και $f(1)=-6 \Rightarrow f^{-1}(f(1)=f^{-1}(-6) \Rightarrow 1=f^{-1}(-6)$

iii) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , η εξίσωση

$f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow x^3+x-8=x \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$

iv) Είναι : $f(x^2-8)=-6 \Leftrightarrow f(x^2-8)=f(1) \overset{f\,"1-1"}{\Leftrightarrow} x^2-8=1 \Leftrightarrow x^2=9$

$\Leftrightarrow x=\pm 3$

v) Είναι : $f^{-1}(\log x^2) \le 2 \underset{f\uparrow}{\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}} f(f^{-1}(\log x^2)) \le f(2) \Leftrightarrow$

$\log x^2 \le 2 \Leftrightarrow x^2 \le 10^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \le \sqrt{10^2} \Leftrightarrow |x| \le 10 \Leftrightarrow -10 \le x \le 10$.

Άρα $\underline{x \in [-10,10]-\{0\}}$

B. Είναι $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x\in(0,1)=A_1 \\ \sqrt{x-1}, & x\in[1+\infty)=A_2 \end{cases}$

- Αν $x\in A_1$ η εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow \ln x=y \Leftrightarrow x=e^y$

  Πρέπει $0<e^y<1 \Leftrightarrow e^y<e^0 \Leftrightarrow y<0$ δηλ $f(A_1)=(-\infty,0)$ και η λύση μοναδική ως προς x, για κάθε y .

- Αν $x\in A_2$ η $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=y \overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow} x-1=y^2 \Leftrightarrow x=y^2+1$

  Πρέπει $y^2+1\ge 0$, ισχύει .Άρα $f(A_2)=[0,+\infty)$ και η λύση μοναδική ως προς x , για κάθε y .

  Η f είναι «1-1» κατά κλάδο και επειδή

  $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της .

  Αντιστρέφεται λοιπόν και έχει $f^{-1}(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ x^2+1, & x\ge 0 \end{cases}$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4^0</u>

Α. i) Αφού η C_f τέμνει τον x΄x στο σημείο Α(-2,0) είναι f(-2)=0 . Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R αυτό είναι μοναδικό σημείο και άρα το προσημό της είναι : $f(x)<0$ στο $(-\infty,-2)$ και f(x)>0 στο $(-2,+\infty)$.

ii) Είναι $f(x^2-3x-2)=0 \Leftrightarrow f(x^2-3x-2)=f(-2) \overset{f\,"1-1"}{\Leftrightarrow}$

$x^2-3x-2=-2 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$

iii) Είναι : $f(e^{2x})=f(3e^x-2) \overset{f\,"1-1"}{\Leftrightarrow} e^{2x}=3e^x-2 \Leftrightarrow$

$e^{2x}-3e^x+2=0 \Leftrightarrow e^x=1$ ή $e^x=2 \Leftrightarrow$

$e^x=e^0$ ή $\ln e^x=\ln 2 \Leftrightarrow x=0$ ή x=ln2

iv) Είναι : $f(\log^2 x-3)\le 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(\log^2 x-3)\le f(-2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\log^2 x-3\le -2 \Leftrightarrow \log^2 x-1\le 0 \Leftrightarrow \log^2 x\le 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{\log^2 x}\le 1 \Leftrightarrow |\log x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le \log \le 1 \Leftrightarrow$

$\log 10^{-1}\le \log x\le \log 10 \Leftrightarrow 10^{-1}\le x\le 10$

Άρα $x\in\left[10^{-1},10\right]-\{0\}$

Β.α) Έστω $x_1,x_2\in A$ με

$$x_1<x_2 \underset{g\downarrow}{\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}} \left.\begin{matrix} f(x_1)<f(x_2) \\ g(x_1)>g(x_2) \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x_1)<f(x_2) \\ -g(x_1)>-g(x_2) \end{matrix}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$f(x_1)-g(x_1)>f(x_2)-g(x_2) \Rightarrow (f-g)(x_1)>(f-g)(x_2)$.

Άρα η f-g γνησίως αύξουσα .

β)

i) ● Η $f(x)=x^3+2^x-3$ έχει π.ο το $A_f=R$. Η x^3 γνησίως αύξουσα η 2^x γνησίως αύξουσα άρα η f γνησίως αύξουσα .

● Η $g(x)=8-x^5-7^x$ έχει π.ο το $A_g=R$.

Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2 \Rightarrow \left|\begin{matrix} x_1^5<x_2^5 \Rightarrow -x_1^5>-x_2^5 \\ 7^x<7^{x_2} \Rightarrow -7^x>-7^{x_2} \end{matrix}\right. \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$8-x_1^5-7^{x_1}>8-x_2^5-7^{x_2} \Rightarrow g(x_1)>g(x_2) \Rightarrow g$ γνησίως φθίνουσα

ii) ● Τα κοινά σημεία των C_f και C_g έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow (f-g)(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x^3+2^x-3)-(8-x^5-7^x)=0 \Leftrightarrow x^3+2^x+x^5+7^x-11=0$$

έχει προφανή ρίζα την x=1 .
Επειδή η f-g είναι η γνησίως αύξουσα (σύμφωνα με το α) η ρίζα είναι μοναδική .

● Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g καθορίζονται από τις λύσεις της ανίσωσης

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)>0 \Leftrightarrow (f-g)(x)>0 \Leftrightarrow$$

$$(f-g)(x)>(f-g)(1) \overset{f-g\uparrow}{\Leftrightarrow} x>1.$$