ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

143

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Συναρτήσεις-Στατιστική **Γεν. Παιδείας**

02-02-14

Θέμα 1ο :

Α. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α .Πως ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f; **(6 μον.)**

Β. i. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός δείγματος , ν παρατηρήσεων περιττού πλήθους . **(4 μον.)**

ii. Αν $w_1, w_2, ..., w_\nu$, είναι οι συντελεστές βαρύτητας , ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$, μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ , να δώσετε τον ορισμό του σταθμικού μέσου της μεταβλητής Χ . **(4 μον.)**

Γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c είναι μια πραγματική σταθερά , να δείξετε ότι :
$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. **(6 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν μία συνάρτηση δεν είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα, τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό . **Σ Λ**

ii. $\left(\sigma\upsilon\nu^3 2x\right)' = -6\sigma\upsilon\nu^2 2x \cdot \eta\mu 2x$ **Σ Λ**

iii. Σε μια κανονική κατανομή το ποσοστό παρατηρήσεων που βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s\right)$ είναι 95%. **Σ Λ**

iv. Τα δείγματα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ και $cx_1, cx_2, ..., cx_\nu$ με c>0 , έχουν τον ίδιο συντελεστή μεταβολής . **Σ Λ**

v. Το χρονόγραμμα χρησιμοποιείται για την απεικόνιση ποιοτικών μεταβλητών . **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

<u>Θέμα 2^{o}:</u>

Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες που κατασκευάζει ένα εργοστάσιο μια ορισμένη ημέρα έχουν μέση διάρκεια ζωής 2000 ώρες και συντελεστή μεταβολής 5% .

Α. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση του δείγματος . **(5 μον.)**

Β. Αν ισχύει $\Sigma t_i^2 = 2807 \cdot 10^6$, να δείξετε ότι το πλήθος των λαμπτήρων είναι 700 . **(7 μον.)**

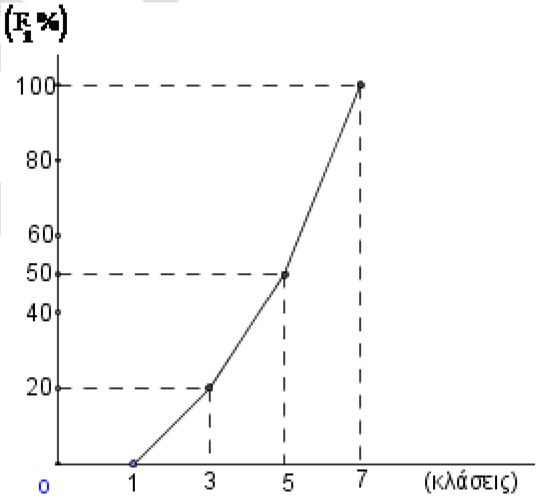
Γ. Αν υποθέσουμε ότι για το παραπάνω δείγμα έχουμε κανονική κατανομή και το πλήθος των λαμπτήρων είναι 1000 , τότε να βρείτε το πλήθος των λαμπτήρων οι οποίοι έχουν διάρκεια ζωής:

i. Από 1900 ώρες έως 2000 ώρες . **(6 μον.)**

ii. Τουλάχιστον 1800 ώρες . **(7 μον.)**

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων(%) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων σε ομαδοποίηση.



Α. Να βρείτε :

i. τη διάμεσο δ ,

ii. το εύρος R ,

iii. τη μέση τιμή $\bar{x}$,

iv. τη διακύμανση s^2 .

(4x3=12 μον.)

Β. Να φτιάξετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα . **(6 μον.)**

Γ. Αν για τις κεντρικές τιμές x_1, x_2, x_3 των παραπάνω κλάσεων ισχύει ότι $\Sigma x_i^2 \cdot v_i = 1180$ να βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων . **(7 μον.)**

<u>Θέμα 4^{o}:</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -e^{2x} + 4$.

Α. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x \to \frac{\ln 4}{2}} \dfrac{f(x)}{16 - e^{4x}}$. **(4 μον.)**

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι δεν παρουσιάζει ακρότατα . **(6 μον.)**

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση (ε) της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. **(7 μον.)**

Δ. Επί της ευθεία (ε) θεωρούμε 2014 σημεία οι τετμημένες των οποίων $x_1, x_2, ..., x_{2014}$ έχουν μέση τιμή μονάδα .

i. Να βρεθεί η μέση τιμή των τεταγμένων των σημείων αυτών.

ii. Να δειχθεί ότι ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων είναι διπλάσιος από τον συντελεστή μεταβολής των τετμημένων .

(2x4=8 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα1°:

Α. Αν Β είναι το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση , με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f΄.

Β. i. Διάμεσος δ ενός δείγματος , ν παρατηρήσεων περιττού πλήθους, που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά , ορίζεται ως η μεσαία τους παρατήρηση .

ii. Αν $w_1, w_2, ..., w_\nu$, είναι οι συντελεστές βαρύτητας , ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$, μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ , τότε ο σταθμικός μέσος ορίζεται ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} w_i}$$

Γ. Έστω $F(x) = c \cdot f(x)$

Τότε $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c\cdot f(x+h) - c\cdot f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} c \cdot \frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} = c\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= c\cdot f'(x) .$$

Άρα $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$

Δ. i. Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.**Λ

Θέμα 2^{ο}:

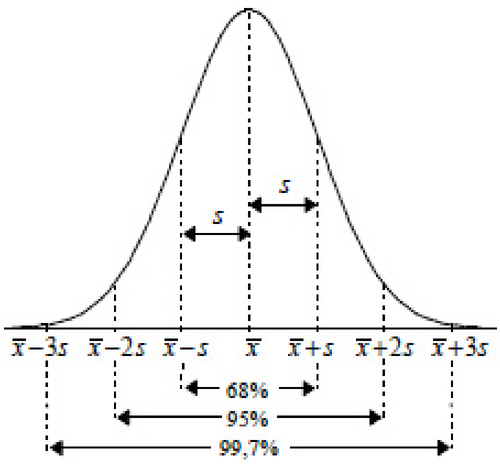
Α. Είναι $CV=\frac{5}{100}\Leftrightarrow\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{5}{100}\Leftrightarrow\frac{s}{2000}=\frac{5}{100}\Leftrightarrow s=100$

Β. Γνωρίζουμε ότι : $s^2=\frac{1}{v}\left\{\Sigma t_i^2-\frac{(\Sigma t_i)^2}{v}\right\}\Leftrightarrow s^2=\frac{\Sigma t_i^2}{v}-\left(\frac{\Sigma t_i}{v}\right)^2\Leftrightarrow$

$$s^2=\frac{\Sigma t_i^2}{v}-\left(\bar{x}\right)^2\Leftrightarrow 100^2=\frac{2807\cdot 10^6}{v}-(2000)^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{2807\cdot 10^6}{v}=4010\cdot 10^3\Leftrightarrow v=\frac{2807\cdot 10^6}{4010\cdot 10^3}\Leftrightarrow v=0,7\cdot 10^3\Leftrightarrow v=700$$

Γ. Εφόσον η κατανομή των λαμπτήρων είναι κανονική έχουμε :

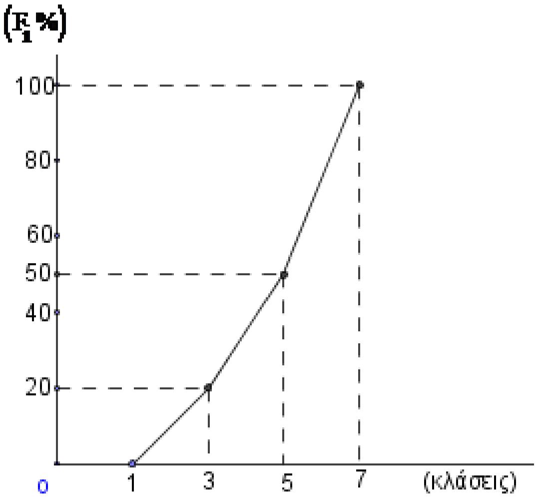


i. Το πλήθος των λαμπτήρων που έχουν διάρκεια ζωής από 1900 ώρες έως 2000 ώρες είναι : $\frac{68}{2}\%\cdot 1000=\frac{34}{100}\cdot 1000=340$ λαμπτήρες .

ii. Το πλήθος των λαμπτήρων που έχουν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 1800 ώρες είναι : $\left(50\%+\frac{95}{2}\%\right)\cdot 1000=\frac{97,5}{100}\cdot 1000=975$ λαμπτήρες.

Θέμα 3ο:

Α.



i. Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων (%) έχουμε δ=5

ii. Είναι $R = X_{max} - X_{min} = 7 - 1 = 6$

iii. Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων :

Κλάσεις	x_i	$F_i\%$	$F_i\%$	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	α_i
$[1,3)$	2	20	20	0,2	0,4	0,8	72°
$[3,5)$	4	50	30	0,3	1,2	4,8	108°
$[5,7)$	6	100	50	0,5	3	18	180°
Σύνολο	-	-	100	1	4,6	23,6	360°

Είναι $f_1\% = F_1\% = 20\%$, $f_2\% = F_2\% - F_1\% = 30\%$,
$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 50\%$ $\quad f_i = f_i\% : 100$.

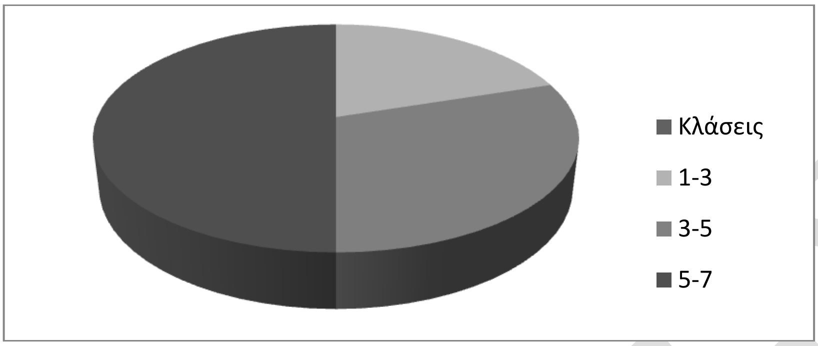
Έχουμε : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i f_i = 4,6$.

iv. Για τη διακύμανση s^2 έχουμε :

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{3} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{3} x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i^2 v_i}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{3} x_i v_i}{v}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 f_i - \left(\bar{x}\right)^2 = 23{,}6 - (4{,}6)^2 = 23{,}6 - 21{,}16 = 2{,}44$$

Β. Για το κυκλικό διάγραμμα βρίσκουμε τις γωνίες $\alpha_i = 360^\circ f_i$



Γ. Είναι $\Sigma x_i^2 v_i = 1180 \Leftrightarrow x_1^2 v_1 + x_2^2 v_2 + x_3^2 v_3 = 1180 \overset{:v}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{x_1^2 v_1}{v} + \frac{x_2^2 v_2}{v} + \frac{x_3^2 v_3}{v} = \frac{1180}{v} \Leftrightarrow x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + x_3^2 f_3 = \frac{1180}{v} \Leftrightarrow$$

$$23{,}6 = \frac{1180}{v} \Leftrightarrow 23{,}6v = 1180 \Leftrightarrow \boxed{v=50}$$

Θέμα 4ο:

Α. Είναι : $\lim\limits_{x\to\frac{\ln 4}{2}} \dfrac{f(x)}{16-e^{4x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\ln 4}{2}} \dfrac{-e^{2x}+4}{16-e^{4x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\ln 4}{2}} \dfrac{4-e^{2x}}{(4-e^{2x})(4+e^{2x})} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\ln 4}{2}} \frac{1}{4+e^{2x}} = \frac{1}{4+e^{2\cdot\frac{\ln 4}{2}}} = \frac{1}{4+e^{\ln 4}} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}$$

Β. Βρίσκουμε την παράγωγο της f .

Είναι $f'(x) = (-e^{2x}+4)' = -e^{2x}\cdot(2x)' = -2e^{2x}$

Παρατηρούμε ότι $e^{2x} > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε $f'(x) = -2e^{2x} < 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Επομένως , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα .

Γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι :

$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 3 = -2x$ άρα $\boxed{\varepsilon: y=-2x+3}$

Δ. Είναι $\bar{x}=1$

i. Οι τεταγμένες των σημείων είναι της μορφής $y_i=-2x_i+3$, εφόσον βρίσκονται πάνω στην εφαπτομένη της C_f . Οπότε είναι : $\bar{y}=-2\bar{x}+3=-2\cdot 1+3=1$.

ii. Έχουμε ότι ο συντελεστής μεταβολής των τετμημένων των σημείων είναι $CV_x=\frac{s_x}{|\bar{x}|}=\frac{s_x}{1}=s_x$.

Για την τυπική απόκλιση των τεταγμένων , έχουμε ότι: $s_y=|-2|\cdot s_x=2s_x$.

Τότε ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων των σημείων είναι $CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{2s_x}{1}=2s_x$.

Εφόσον $CV_x=s_x$ και $CV_y=2s_x$ έπεται ότι $CV_y=2CV_x$.