ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **142**

Υλη: Ολη

Γ'Λυκείου **6-05-12**

Ον/μο:……………….. **Θετ-Τεχν. Κ**

ΖΗΤΗΜΑ 1^0

Α.1 α) Έστω το πολυώνυμο

$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x \in R$.

Να δείξετε οτι $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$. **(Μον. 5)**

β) Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

$x_0 \in R$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. **(Μον. 3)**

Α.2. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ; **(Μον. 3)**

Α.3 .Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β ; **(Μον. 4)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

α. Ο αριθμός $z = (3+5i)^{10} + (3-5i)^{10}$ είναι πραγματικός **Σ** **Λ**

β. Αν για κάθε x κοντά στο 2 ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ **,**
$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 8$ και $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = -6$, τότε $-6 \leq \lim\limits_{x \to 2} f(x) \leq 8$ **Σ** **Λ**

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με α , β, γ , δ $\in$R και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής . **Σ** **Λ**

δ. $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \ln(1 - \eta\mu^2 x)dx = 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \ln \sigma\upsilon\nu x dx$ **Σ** **Λ**

(Μον. 2x4=8)

Γ. Σχεδιάστε μια οποιαδήποτε γραφική παράσταση f που έχει πεδίο ορισμού Α=$[0,2]$ **,** είναι συνεχής στο (0,2) , παίρνει τις τιμές 0 και 2 , αλλά δεν παίρνει την τιμή 1. **(Μον. 2)**

<u>ΖΗΤΗΜΑ 2^0</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x, \quad x > 0$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία **(Μον. 6)**

ii) Να βρείτε τα ακρότατα της f **(Μον. 5)**

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο που παρουσιάζει καμπή . **(Μον. 6)**

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τηC_f και τις ευθείες με εξισώσεις y=0 , x=1 , και x=e **(Μον. 8)**

<u>ΖΗΤΗΜΑ 3^0</u>

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4+x^2} + \alpha x + \beta$ α, β $\in R$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y=2x

α. Να βρείτε τα α και β **(Μον. 5)**

β. Αν α=1 και β=0

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{2x}{(f(x)-x)^2}dx$ **(Μον. 5)**

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(t)dt - x^2 + 2012 \,, \; x \in R \text{ είναι}$$

σταθερή και να βρείτε τον τύπο της . **(Μον.5)**

Β. Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου α, β, γ$\in R$ για τους οποίους ισχύει $\beta^2 = 2\alpha\gamma \neq 0$

i) Να αποδείξετε ότι z_1, z_2 δεν είναι πραγματικοί αριθμοί **(Μον. 2)**

ii) Να δείξετε ότι $z_1^2 + z_2^2 = 0$ **(Μον. 3)**

iii) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 και η αρχή των αξόνων ορίζουν τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές **(Μον. 3)**

iv) Να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης $f(z) = |z - z_1| + |z - z_2|, \quad z \in C$ **(Μον. 2)**

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4^{0}</u>

Α. Έστω f παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση στο διάστημα $[a,\beta]$ και $g(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)\cdot\dfrac{f(x)+f(a)}{2}, x\in[a,\beta]$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ **(Μον. 3)**

ii) Να βρείτε την παράγωγο της g **(Μον. 3)**

iii) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα **(Μον. 4)**

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx>(\beta-\alpha)\cdot\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ **(Μον. 2)**

Β. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει : $f^2(x+3)+9\le 6f(4x^2-3x+3),\quad x\in R$.
Να αποδείξετε ότι :

i) f(3)=3 και f(4)=3 **(Μον.3)**

ii) Η f δεν είναι αντιστρέψιμη **(Μον.2)**

iii) Η f΄ δεν είναι αντιστρέψιμη **(Μον.4)**

iv) Η εξίσωση f΄΄(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R **(Μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

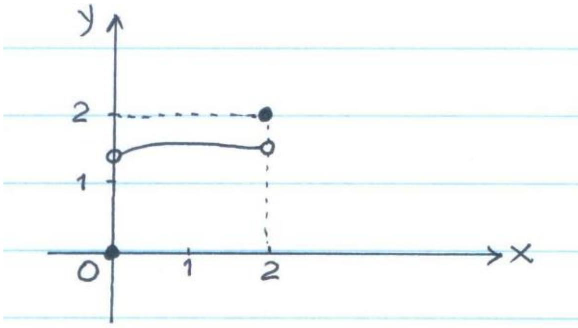
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΖΗΤΗΜΑ 1^0

Α.1. Θεωρία **Α.2.** Θεωρία **Α.3.** Θεωρία

Β. **α** $\to \Sigma$ **β** $\to \Lambda$ **γ** $\to \Sigma$ **δ** $\to \Lambda$

Γ.



ΖΗΤΗΜΑ 2^0

i.) Είναι $f'(x)=(\sqrt{x}\cdot \ln x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$

Αν $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\geq 0 \Leftrightarrow \ln x+2\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq -2 \Leftrightarrow x\geq e^{-2}$

Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

ii.) Η f έχει ελάχιστο στο e^{-2} το $f(e^{-2})=\sqrt{e^{-2}}\cdot \ln e^{-2}=\frac{1}{e}\cdot(-2)=$

iii.) Είναι $f''(x)=\left(\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}-(\ln x+2)\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$ =- $\frac{2}{3}$

$=\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x+2}{\sqrt{x}}}{4x}=-\frac{\ln x}{4x\sqrt{x}}$ με ρίζα την x=1 , θέση σ.κ.

Η εφαπτομένη στο x_0=1 είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ δηλ . y=1(x-1)

δηλ. $\boxed{\varepsilon: y=x-1}$

iv) $E=\int_1^e |f(x)|dx=\int_1^e \left|\sqrt{x}\cdot \ln x\right|dx=\int_1^e \sqrt{x}\cdot \ln x\cdot dx=\int_1^e x^{\frac{1}{2}}\cdot \ln x\cdot dx=$

$$=\frac{2}{3}\int_1^e (x^{\frac{3}{2}})'\cdot \ln x dx=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{2}{3}}.\ln x\right]_1^e-\frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot e^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^e=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}(e^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}e^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}=\frac{2}{9}e^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}$$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 3^0</u>

Α. α) Η y=2x θα είναι ασ. της C_f στο $+\infty$ αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=0$

είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4+x^2}+\alpha x+\beta-2x)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4+x^2}+(\alpha-2)x+\beta\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{4}{x}+1}+\alpha-2+\frac{\beta}{x}\right)\right]=$$

$=(+\infty)(\alpha-1)$ και επειδή το θέλουμε πραγματικό αριθμό πρέπει κατ'αρχήν να είναι α=1.

Τότε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+x^2}+x+\beta-2x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+x^2}-x+\beta\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4}-(x-\beta)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4-(x-\beta)^2}{\sqrt{x^2+4}+x-\beta}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\beta x+4-\beta^2}{\sqrt{x^2+4}+x-\beta}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2\beta+\frac{4-\beta^2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1-\frac{\beta}{x}\right)}=\frac{2\beta+0}{2}=\beta\in R$$ οπότε πρέπει β=0

β) i) είναι : $I=\int_0^1 \frac{2x}{(f(x)-x)^2}dx=\int_0^1 \frac{2x}{(\sqrt{4+x^2}+x-x)^2}dx=$

$$\int_0^1 \frac{2x}{4+x^2}dx=\int_0^1 \frac{(4+x^2)'}{4+x^2}dx=\left[\ln(4+x^2)\right]_0^1=\ln 5-\ln 4=\ln\frac{5}{4}$$

ii) Η f είναι συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών , το $0\in R$ οπότε οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)dt$ και $\int_0^{-x} f(t)dt$ είναι παραγ. στο R . Έχουμε λοιπόν :

$g'(x)=f(x)+f(-x)(-x)'-2x=f(x)-f(-x)-2x=$

$=\sqrt{4+x^2}+x-\sqrt{4+(-x)^2}-(-x)-2x=2x-2x=0\ \ \forall x\in R$

Άρα g(x)=c (1).Από τη δοθείσα ισότητα είναι :

$g(0)=\int_0^0 f(t)dt+\int_0^0 f(t)dt-0^2+2012=2012$.

Από την (1) $\Rightarrow g(0)=c$ οπότε c=2012 .

Άρα $\boxed{g(x)=2012}$

Β. i) Η $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ έχει $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2\alpha\gamma-4\alpha\gamma=-2\alpha\gamma=$ $=-\beta^2<0$ άρα έχει ρίζες μιγαδικές συζυγείς .

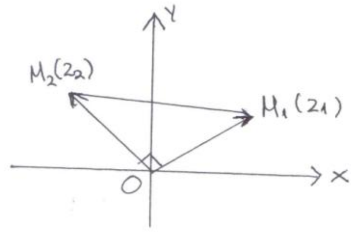
ii) Έχουμε $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{2\gamma}{\alpha}=$

$$=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}=\frac{0}{\alpha^2}=0$$

iii) Αφού $z_1^2+z_2^2=0\Leftrightarrow z_1^2=-z_2^2\Rightarrow$

$|z_1^2|=|-z_2^2|\Leftrightarrow|z_1|^2=|z_2|^2\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|\Leftrightarrow$

$(OM_1)=(OM_2)$ δηλ . το M_1OM_2 ισοσκελές



Επίσης

$(M_1M_2)^2=|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=$

$=z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\cdot z_1-z_2\cdot z_2=$

$=|z_1|^2+|z_2|^2-\underbrace{z_1^2-z_2^2}_{0}=|z_1|^2+|z_2|^2=(OM_1)^2+(OM_2)^2$

δηλαδή το M_1OM_2 είναι και ορθογώνιο .(Πυθ.Θεώρημα) .

iv) Είναι $f(z)=|z-z_1|+|z-z_2|=|z-z_1|+|z_2-z|\geq|z-z_1+z_2-z|=$

$$=|-z_1+z_2|=|z_2-z_1|=\left|\frac{-\beta-i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}-\frac{-\beta+i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right|=\left|\frac{-2i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right|$$

$=\left|\frac{\sqrt{\beta^2}}{\alpha}\right|=\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ δηλαδή $f(z)\geq|z_2-z_1|=\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$. Το = ισχύει όταν $z=z_2$ π.χ

ΖΗΤΗΜΑ 4^0

Α.i) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ είναι και συνεχής .

Η συνάρτηση λοιπόν $\int_\alpha^x f(t)dt$, αφού $\alpha\in[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$.Έτσι η g είναι παραγ. στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων .

ii) Είναι $g'(x)=\left[\int_0^x f(t)dt-(x-\alpha)\cdot\frac{f(x)+f(\alpha)}{2}\right]'=$

$$=f(x)-(x-\alpha)'\frac{f(x)+f(\alpha)}{2}-(x-\alpha)\left(\frac{f(x)+f(\alpha)}{2}\right)'=$$

$$=f(x)-\frac{f(x)+f(\alpha)}{2}-(x-\alpha)\cdot\frac{f'(x)}{2}=\frac{f(x)-f(\alpha)}{2}-\frac{x-\alpha}{2}\cdot f'(x)$$

iii) Έχουμε ότι $g'(x)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{2}-\frac{x-\alpha}{2}\cdot f'(x)$ (1)

Για την f στο $[\alpha,x]$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. άρα $\exists\xi\in(\alpha,x)$:

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ οπότε (1)γράφεται

$$g'(x)=\frac{(x-\alpha)\cdot f'(\xi)}{2}-\frac{x-\alpha}{2}f'(x)=\frac{x-\alpha}{2}[f'(\xi)-f'(x)] \quad (2)$$

Επειδή η f είναι κοίλη θα έχει f΄ γνησίως φθίνουσα

$\overset{\xi<x}{\Rightarrow} f'(\xi)>f'(x)\Rightarrow f'(\xi)-f'(x)>0$. Επίσης $x-\alpha>0$ και

από (2)$\Rightarrow g'(x)>0$ άρα η g γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$

iv) Είναι $\alpha < \beta \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(\alpha) < g(\beta) \Rightarrow 0 < \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - (\beta-\alpha)\cdot\dfrac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}$

δηλ. $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt > (\beta-\alpha)\cdot\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

B.Έχουμε ότι $f^2(x+3)+9 \le 6f(4x^2-3x+3),\quad x\in R$ (1)

i)●Για x=0 η (1) γίνεται $f^2(3)+9\le 6f(3) \Leftrightarrow f^2(3)-6f(3)+9\le 0 \Leftrightarrow$ $(f(3)-3)^2 \le 0 \Leftrightarrow (f(3)-3)^2=0 \Leftrightarrow f(3)=3$

●Για x=1 η (1) γίνεται $f^2(4)+9\le 6f(4) \Leftrightarrow f^2(4)-6f(4)+9\le 0 \Leftrightarrow$ $(f(4)-3)^2 \le 0 \Leftrightarrow (f(4)-3)^2=0 \Leftrightarrow f(4)=3$

ii) Επειδή $3\neq 4$ και f(3)=f(4) η f δεν είναι «1-1» άρα δεν είναι αντιστρέψιμη .

iii) Η (1) γράφεται $f^2(x+3)+9\le 6f(4x^2-3x+3)+9\le 0$ δηλ η $g(x)=f^2(x+3)-6f(4x^2-3x+3)+9$ έχει μέγιστη τιμή το 0. Παρατηρώ – και σύμφωνα με το (i) – ότι αυτό συμβαίνει για x=0 και για x=1 .Σύμφωνα με το θ.Fermat λοιπόν θα είναι $g'(0)=0$, $g'(1)=0$

Είναι :

$g'(x)=2f'(x+3)\cdot f(x+3)-6f'(4x^2-3x+3)(4x^2-3x+3)'=$

$=2f'(x+3)\cdot f(x+3)-6f'(4x^2-3x+3)\cdot(8x-3)$

Από τις $g'(0)=0$ και $g'(1)=0$ έχουμε :

- $2f'(3)\cdot f(3)-6f'(3)\cdot(-3)=0 \Leftrightarrow 2\cdot f'(3)\cdot 3+18f'(3)=0 \Leftrightarrow$ $24\cdot f'(3)=0 \Leftrightarrow f'(3)=0$
- $2f'(4)\cdot f(4)-6f'(4)\cdot 5=0 \Leftrightarrow 2f'(4)\cdot 3-30\cdot f'(4)=0 \Leftrightarrow$ $-24f'(4)=0 \Leftrightarrow f'(4)=0$

Αφού $3\neq 4$ και $f'(3)=f'(4)$ η f΄ δεν είναι «1-1» άρα δεν αντιστρέφεται .

iv)
$$\left.\begin{array}{l}\text{Η f είναι συνεχής στο } [3,4] \\ \text{Η f είναι παραγ. στο } (3,4) \\ f'(3)=f'(4)\end{array}\right| \overset{\theta.R}{\Rightarrow} \exists\, \tau.\varepsilon.\xi\in(3,4)\subset R$$

ώστε f΄΄(ξ)=0 δηλ η εξίσωση f΄΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R.