

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

141

Ον/μο:.....

Ύλη: Συναρτήσεις-Στατιστική

Γ' Λυκείου

Γεν. Παιδείας

10-11-13

Θέμα 1^ο :

- A.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ; (5 μον.)
- B.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της $f(x) = x^2$ είναι ίση με $f'(x) = 2x$. (5 μον.)
- Γ.** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X και $f_1, f_2, \dots, f_k$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των προηγούμενων τιμών .Να αποδείξετε ότι :
- i.** $0 \leq f_i \leq 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$
 - ii.** $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$
- (2x2,5=5 μον.)
- Δ.** Τι λέγεται ιστόγραμμα αθροιστικών απόλυτων-σχετικών συχνοτήτων ; (5 μον.)
- Ε.** Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:
- i.** Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ είναι $A = \mathbb{R} - \{0\}$. Σ Λ
 - ii.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$. Σ Λ
 - iii.** Κατά την ομαδοποίηση παρατηρήσεων σε κλάσεις ίσου πλάτους , αν R είναι το εύρος του δείγματος και k ο αριθμός των κλάσεων , το πλάτος των κλάσεων είναι $c = \frac{R}{k}$. Σ Λ
 - iv.** Η κεντρική τιμή κάθε κλάσης ισούται με το ημιάθροισμα των άκρων της . Σ Λ
 - v.** Το χρώμα των ματιών είναι μια διακριτή μεταβλητή. Σ Λ

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 + 5x + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και λ μια πραγματική σταθερά .

A. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(-2, f(-2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=x+3$, τότε :

i. Να υπολογίσετε το λ (4 μον.)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A . (6 μον.)

B. Αν $\lambda=1$ τότε :

i. Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες . (5 μον.)

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα . (6 μον.)

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{\sqrt{x+5}-1}$. (4 μον.)

Θέμα 3^ο:

Σε κάποιο δείγμα μεγέθους n οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής x_i είναι $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ και ισχύει ότι :

$$F_i \% = \frac{i^2 + 4}{n} \cdot 10^3, \text{ για κάθε } i=1,2,3,4.$$

A. Να δείξετε ότι $n=200$. (7 μον.)

B. Να σχηματίσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων , απόλυτων και σχετικών . (10 μον.)

Γ. Να σχεδιάσετε το κυκλικό διάγραμμα . (4 μον.)

Δ. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. (4 μον.)

Θέμα 4^ο:

Έστω ότι οι τιμές μιας μεταβλητής X έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσους πλάτους με κεντρικές τιμές $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 10$, $x_4 = 14$ και $x_5 = 18$. Γνωρίζουμε ότι : Η συχνότητα της 4^{ης} κλάσης είναι διπλάσια της 1^{ης} κλάσης . Η συχνότητα της 2^{ης} κλάσης είναι το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 5$.

Επίσης , η συχνότητα της 3^{ης} κλάσης είναι το όριο

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 2x}$ και η συχνότητα της 5^{ης} κλάσης είναι 2. Τέλος

το μέγεθος του πληθυσμού είναι $n=20$.

A. Να βρεθεί το πλάτος c των κλάσεων .

(3 μον.)

B. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.

(7 μον.)

Γ. Θεωρώντας ότι η μεταβλητή X παριστάνει ημέρες άδειας για 20 άτομα μιας εταιρείας να βρείτε :

i. Πόσα άτομα πήραν άδεια το πολύ 12 ημέρες ;

ii. Ποιό ποσοστό των ατόμων πήρε άδεια τουλάχιστον 8 ημέρες ;

iii. Πόσα άτομα πήραν άδεια πάνω από 9 ημέρες ;

(3x2=6μον.)

Δ. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων επί τις εκατό και να βρείτε το εμβαδό του .

(5 μον.)

Ε. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων επί τοις εκατό .

(4 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^ο:

A. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

$$\begin{aligned} \text{B. Είναι } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (x^2)' = 2x.$$

Γ. i. Ισχύει $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου v_i η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής x_i .

Επίσης, για $i=1,2,\dots,k$ έχουμε:

$$0 \leq v_i \leq v \Leftrightarrow 0 \leq \frac{v_i}{v} \leq \frac{v}{v} = 1. \text{ Συνεπώς } 0 \leq f_i \leq 1 \text{ για κάθε } i=1,2,\dots,k.$$

$$\begin{aligned} \text{ii. Ισχύει } f_1 + f_2 + \dots + f_k &= \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_k}{v} = \\ &= \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1. \end{aligned}$$

Δ. Ιστόγραμμα αθροιστικών απόλυτων ή σχετικών συχνοτήτων είναι μια σειρά από διαδοχικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν βάσεις ίσες με το πλάτος c των κλάσεων και ύψη ίσα με την αθροιστική απόλυτη ή σχετική συχνότητα της κλάσης που εκπροσωπούν.

E. i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Σ v. Λ

Θέμα 2^ο:

Είναι $f(x) = \lambda x^2 + 5x + 4$

A. i. Εφόσον η εφαπτομένη της C_f στο $A(-2, f(-2))$ είναι παράλληλη στην $y=x+3$ θα είναι $f'(-2)=1$. Όμως $f'(x) = 2\lambda x + 5$ οπότε $f'(-2)=1 \Leftrightarrow -4\lambda + 5 = 1 \Leftrightarrow -4\lambda = -4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$

ii. Για $\lambda=1$ είναι $f(x) = x^2 + 5x + 4$ και $f'(x) = 2x + 5$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(-2, f(-2))$ είναι $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$. (1)

Είναι $f(-2) = -2$ και $f'(-2) = 1$ οπότε η (1) δίνει :

$$y + 2 = x + 2 \Rightarrow \boxed{y = x}$$

B. i. Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + 5x + 4$ τέμνει τον x' όταν $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = -4$ άρα στα $(-1, 0)$ και $(-4, 0)$ ενώ τον y' όταν $x=0$, οπότε $f(0) = 4$ άρα στο $(0, 4)$.

ii. Για τη μονοτονία και τα ακρότατα της $f(x) = x^2 + 5x + 4$ έχουμε :

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ και

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x + 5 > 0 \Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

- Ο πίνακας προσήμων της f' είναι :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
f'		-	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

0.Ε

Η f είναι $\searrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$ και $\nearrow$ στο $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -\frac{5}{2}$ το $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.

$$\begin{aligned}
 \text{iii. Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x+5}-1} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+5x+4}{\sqrt{x+5}-1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+1)}{(\sqrt{x+5}-1)(\sqrt{x+5}+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+1)}{(x+4)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+1)}{1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} (x+1)(\sqrt{x+5}+1) = -6
 \end{aligned}$$

Θέμα 3^ο:

A. Είναι $F_4\% = 100 \Leftrightarrow \frac{4^2+4}{v} \cdot 1000 = 100 \Leftrightarrow 20 \cdot 1000 = 100v \Leftrightarrow v = 200$

B. Για $v=200$ είναι : $F_1\% = \frac{1^2+4}{200} \cdot 1000 = 25\%$

$$F_2\% = \frac{2^2+4}{200} \cdot 1000 = 40\%$$

$$F_3\% = \frac{3^2+4}{200} \cdot 1000 = 65\%$$

$$F_4\% = 100\%$$

Οπότε , $f_1\% = F_1\% = 25\%$, $f_2\% = F_2\% - F_1\% = 15\%$

$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 25\%$ και $f_4\% = F_4\% - F_3\% = 35\%$

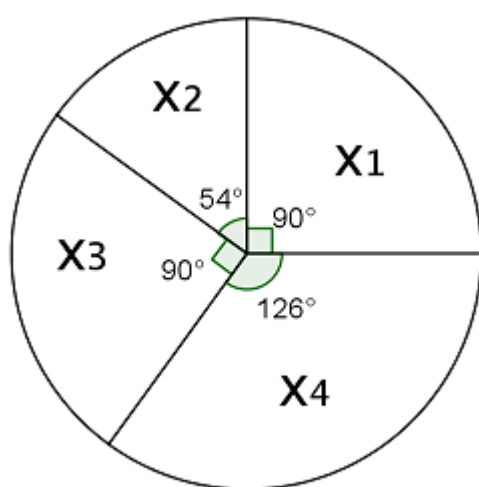
Από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{v}$ βρίσκουμε τα v_1, v_2, v_3, v_4 και εφόσον

$N_1 = v_1$, $N_2 = N_1 + v_2$, κ.ο.κ έχουμε τον πίνακα :

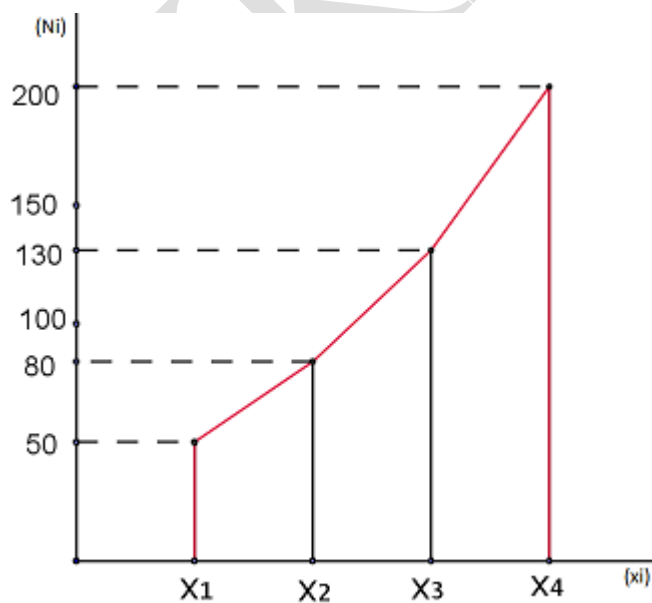
x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	α_i
x_1	50	50	25	25	90
x_2	30	80	15	40	54
x_3	50	130	25	65	90
x_4	70	200	35	100	126
Σύνολο	200	-	100	-	360

Γ. Για το κυκλικό διάγραμμα προσθέτουμε τη στήλη

$$\alpha_i = \frac{v_i}{v} \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ$$



Δ.



Θέμα 4^ο:

Α. Το πλάτος c των κλάσεων είναι όσο η διαφορά δύο διαδοχικών κεντρικών τιμών, οπότε $c = x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι :

$$* v_4 = 2v_1 \quad (1)$$

* Για τη v_2 έχουμε : $g(x) = x^2 + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 5 \geq 5 \Leftrightarrow g(x) \geq 5$ οπότε η g έχει ελάχιστο το 5. Άρα $v_2 = 5$

$$* v_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 2x - 8)}{x(x - 2)} = 4$$

δηλαδή $v_3 = 4$

$$* v_5 = 2 \quad \text{και} \quad v = 20$$

$$\text{Επίσης } v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 20 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} v_1 + 5 + 4 + 2v_1 + 2 = 20 \Leftrightarrow 3v_1 = 9 \Leftrightarrow v_1 = 3 \quad \text{και τότε} \quad v_4 = 6$$

ο πίνακας συχνοτήτων είναι :

[κλάσεις)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[0,4)	2	3	15	3	15
[4,8)	6	5	25	8	40
[8,12)	10	4	20	12	60
[12,16)	14	6	30	18	90
[16,20)	18	2	10	20	100
Σύνολο	-	20	100	-	-

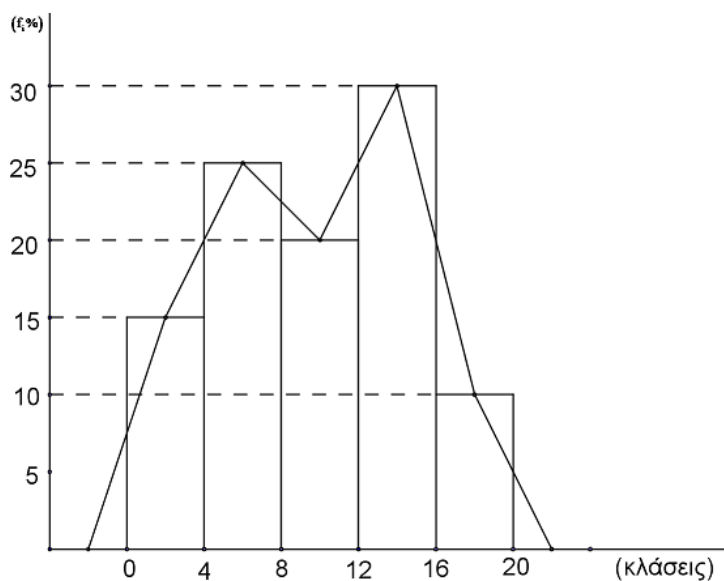
Γ. Προσθέτουμε τις στήλες $f_i \% = \frac{v_i}{N} 100$ και N_i , όπου $N_1 = v_1$ και

$N_2 = N_1 + v_2$ κ.ο.κ και έχουμε ότι :

- i. Τα άτομα που πήραν άδεια το πολύ 12 ημέρες είναι $N_3 = 12$.
- ii. Το ποσοστό των ατόμων που πήρε άδεια τουλάχιστον 8 ημέρες είναι $f_3 \% + f_4 \% + f_5 \% = 60\%$.
- iii. Τα άτομα που πήραν άδεια πάνω από 9 ημέρες είναι :

$$\frac{3}{4} v_3 + v_4 + v_5 = \frac{3}{4} \cdot 4 + 6 + 2 = 11.$$

Δ. Το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό είναι :



Το πολύγωνο έχει εμβαδό $E = f_1 \% + \dots + f_5 \% = 100$.

Ε. Το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων είναι :

