ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Παράγωγοι-Ολοκληρώματα **Θετ.-Τεχν. Κατ.**

11-03-12

Ζήτημα 1ο:

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, \quad c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, \quad c \in R$ **(Μον.9)**

Β. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. **(Μον.6)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις :

1. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx - \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$ **Σ Λ**

2. Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εκφράζει εμβαδό **Σ Λ**

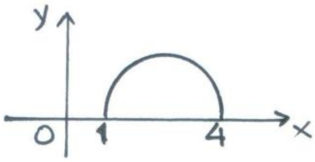
3. Αν τα σημεία Α(-1,0) και Β(1,1) ανήκουν στην C_f τότε $\int_{-1}^{1} \frac{f'(x)}{1+f(x)}dx = 2\ln 2$ **Σ Λ**

4. Η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f της συνάρτησης

α) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$ **Σ Λ**

β) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$ **Σ Λ**

5. Αν η C_f είναι η του σχήματος
τότε:



α) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$ **Σ Λ**

β) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$ **Σ Λ**

γ) $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,4)$ **Σ Λ**

δ) υπάρχει $x_0\in(1,4): f'(x_0)=0$ **Σ Λ**

6. Αν $f'(x)=(x-3)^2\cdot(x-2)$ για κάθε $x\in R$ **τότε**
το f(3) είναι τοπικό ελάχιστο της f **Σ Λ**

(Μον.10)

<u>Ζήτημα 2^o:</u>

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha,\quad \alpha\in R$

Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ να βρείτε το α **(Μον.5)**

Β. Για α=-1

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα , τα κοίλα και τα σημεία καμπής . **(Μον.6)**

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **,** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **(Μον.4)**

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 **(Μον.5)**

δ) Να λύσετε την ανίσωση **:**

$$\ln(2\lambda^2+2)-\frac{1}{\lambda^2+6}>\ln(\lambda^2+6)-\frac{1}{2\lambda^2+2}$$ **(Μον.5)**

Ζήτημα 3ο:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x, & -\frac{\pi}{2}\le x<0 \\ \sqrt{1+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

α) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την f **(Μον.5)**

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ **(Μον.10)**

Β. Έστω $g(x)=\alpha x^{3}+\beta x^{2}+\gamma x+\delta$.
Να βρείτε τα α, β , γ , δ $\in$ R ώστε η C_g να τέμνει τον y΄y στο σημείο Μ(0,3) και η g να παρουσιάζει στο $x_0=1$ μοναδικό ακρότατο το 4 **(Μον.10)**

Ζήτημα 4ο:

Α. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R για την οποία ισχύει $f^{3}(x)+2f(x)=12x$, για κάθε x∈ R .

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f. **(Μον.6)**

β) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in$ R ισχύει :
$|f(\beta)-f(\alpha)|\le 6\cdot|\beta-\alpha|$ **(Μον.6)**

γ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f **(Μον.6)**

Β. Να λύσετε το σύστημα :
$x+e^{x-1}=y+e^{y-1}$
$x^{2}+xy+y^{2}=12$ **(Μον.7)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

www.efklidis.edu.gr *Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Ζήτημα 1ο:

Α. Θεωρία **Β.** Θεωρία

Γ. 1Σ , 2Λ , 3Λ , 4αΛ , 4βΣ , **5** Λ , Λ , Λ , Σ , **6**Λ

Ζήτημα 2ο:

Α. Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}=\frac{x+\alpha}{x^2}$ και f(1)=0 δηλ. για κάθε $x>0$

ισχύει $f(x)\geq f(1)$.Από το θεώρημα του Fermat πρέπει $f'(1)=0$

δηλ $\frac{1+\alpha}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow \alpha=-1$

Β. α) Για α=-1 είναι $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$ και $f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$ με ρίζα την

x=1 . Επίσης $f''(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x^2}=\frac{2-x}{x^2}$ με ρίζα x=2 .Το πρόσημο

της f΄ , η μονοτονία και τα ακρότατα της f καθώς και το πρόσημο της f΄΄ η καμπυλότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον πίνακα :

x	0		1		2		+∞
f'		−	0	+		+	
f''		+		+	0	−	
f		↘	Τ.Ε	↗	Σ.Κ	↗	

f(1)=0

β) Είναι :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+\frac{1}{x}-1)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln x-x+1}{x}$ (1)

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{LH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$ και από (1) είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)=(+\infty+0-1=+\infty$

γ) $f(A)=[0,+\infty)$ και η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική λύση την x=1

δ) Είναι $2\lambda^2+2>1$, $\lambda^2+6>1$ και f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
Η ανίσωση γράφεται :

$$\ln(2\lambda^2+2)+\frac{1}{2\lambda^2+2}>\ln(\lambda^2+6)+\frac{1}{\lambda^2+6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(2\lambda^2+2)>f(\lambda^2+6)\Leftrightarrow 2\lambda^2+2>\lambda^2+6\Leftrightarrow \lambda^2>4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\lambda^2}>\sqrt{4}\Leftrightarrow|\lambda|>2\Leftrightarrow\lambda<-2 \text{ ή } \lambda>2$$

<u>Ζήτημα 3ο:</u>

Α. α) Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ και $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών .

Ακόμη : $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=e^0\cdot\sigma\upsilon\nu0=1$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{1+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\sqrt{1+2\cdot0\cdot1}=1$,

f(0)=1 οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$.Άρα συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

β) Είναι :

- $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$=\left[e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^x\cdot\eta\mu x\cdot dx=1+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(e^x)'\cdot\eta\mu x dx=$$

$$=1+\left[e^x\eta\mu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx\ ,\ \text{άρα}$$

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=1+(0-e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1+e^{-\frac{\pi}{2}}\ \text{δηλ}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx=\frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\ (1)$$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \cdot dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \cdot dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx = [-\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \eta\mu\frac{\pi}{2}\right)$-

$(-\sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu 0) = 1 + 1 = 2$

Άρα $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} + 2 = \frac{5+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$

Β. Αφού η C_f τέμνει τον y΄y στο Μ(0,3) θα είναι f(0)=3 δηλ δ=3
Αφού στο x_0=1 έχει ακρότατο θα είναι f΄(1)=0 δηλ .
$3\alpha \cdot 1^2 + 2\beta \cdot 1 + \gamma = 0$ δηλαδή $\underline{3\alpha + 2\beta + \gamma = 0}$ (1)

Αφού το ακρότατο είναι το 4 θα είναι f(1)=4 δηλ. $\underline{\alpha + \beta + \gamma = 1}$ (2)

Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και το ακρότατο της f στο x_0=1 μοναδικό .Άρα η f΄ δεν μπορεί να είναι τριώνυμο οπότε α=0

Από (1) και (2) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} \beta = -1 \\ \gamma = 2 \end{array}$

Ζήτημα 4ο

Α. α) Από την ισότητα $f^3(x) + 2f(x) = 12x$ είναι

$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2f'(x) = 12 \Leftrightarrow (3f^2(x) + 2) \cdot f'(x) = 12 \Leftrightarrow$

$f'(x) = \frac{12}{3f^2(x) + 2} > 0$ άρα η f γνησίως αύξουσα .

β) Από Θ.Μ.Τ προκύπτει ότι υπάρχει τ.ε $\xi \in (\alpha, \beta)$,ωστε

$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ δηλ $\frac{12}{3f^2(\xi) + 2} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ οπότε

$$\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|}=\frac{12}{3f^2(\xi)+2}$$. Αρκεί ν.δ.ο $\frac{12}{3f^2(\xi)+2}\le 6 \Leftrightarrow$

$18f^2(\xi)+12\ge 12 \Leftrightarrow 18f^2(\xi)\ge 0$ που ισχύει .

Άρα $|f(\beta)-f(\alpha)|\le 6\cdot|\beta-\alpha|$.

γ) είναι $f''(x)=\left(\frac{12}{3f^2(x)+2}\right)'=-\frac{12\cdot(3f^2(x)+2)'}{(3f^2(x)+2)^2}=$

$=-\frac{72\cdot f(x)\cdot f'(x)}{(3f^2(x)+2)^2}=-\frac{72f'(x)}{(3f^2(x)+2)^2}\cdot f(x)$ (1)

Από την $f^3(x)+2f(x)=12x \Rightarrow f^3(0)+2f(0)=0 \Leftrightarrow$

$f(0)\cdot\left[f^2(0)+2\right]=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ οπότε f΄΄(0)=0 .

επίσης : $f^3(x)+2f(x)=12x \Leftrightarrow (f^2(x)+2)\cdot f(x)=12x \Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{12x}{f^2(x)+2}$ με ρίζα την x=0 .Το πρόσημο της f(x) –

άρα και της f΄΄(x) , από (1) – είναι ό,τι του 12x. Έτσι :

Αν $x<0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f''(x)>0$ οπότε η f είναι κυρτή .

Αν $x>0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f''(x)<0$ οπότε η f είναι κοίλη .

Το σημείο Μ(0,f(0)) λοιπόν είναι σημείο καμπής .

Β. Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=x+e^{x-1}$ που έχει πεδίο ορισμού το A=R και $f'(x)=1+e^{x-1}>0$.Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε και ΄΄1-1΄΄ . Η πρώτη εξίσωση , $x+e^{x-1}=y+e^{y-1}$ του συστήματος γράφεται $f(x)=f(y) \overset{f\,"1-1"}{\Leftrightarrow} x=y$ (1)

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται $x^2+x^2+x^2=12 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2$ ή x=2 .Λόγω και της (1) το δοθέν σύστημα έχει δύο λύσεις , τις

<u>(x,y)=(-2,-2)</u> ή <u>(x,y)=(2,2)</u>