ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

140

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **Γεν. Παιδείας**

10/09/2013

Θέμα 1^{ο} :

Α. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής ; **(6 μον.)**

Β. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α , παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$**;** **(4 μον.)**

Γ. Τι ορίζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού ; **(2 μον.)**

Δ. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες να δείξετε ότι : $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$. **(8 μον.)**

Ε. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Η σχέση $x^2+y^2=1$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση . **Σ Λ**

ii. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R , τότε $f(3)>f(5)$. **Σ Λ**

iii. Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2013+h)-f(2013)}{h}$ υπάρχει και είναι ίσο με 2 τότε $f'(2013)=2$. **Σ Λ**

iv. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ **Σ Λ**

v. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu(-x)$, τότε $f'(x)=\eta\mu x$. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Με ένα σύρμα μήκους 200cm κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μήκους x και πλάτους y .

i. Να εκφράσετε τη διαγώνιο του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x . **(8 μον.)**

ii. Αν d(x) είναι η παραπάνω συνάρτηση , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της . **(9 μον.)**

iii. Να βρείτε το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου ώστε να ισχύει $d'(x)=0$. **(8 μον.)**

Θέμα 3^o:

Α. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο x=1 με

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\cdot\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

i. Να βρείτε την τιμή f(1) . **(6 μον.)**

ii. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1,f(1)) . **(7 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^2-3}{x-\alpha},\quad x\neq\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράσταση της g στο σημείο Β(1,g(1)) είναι παράλληλη στον x΄x , τότε να δείξετε ότι α=2 . **(4 μον.)**

ii. Να δείξετε ότι $(x-2)^2 g'(x)+(x-2)g(x)-2x^2+4x=0$ για κάθε $x\neq 2$. **(5 μον.)**

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g'(x)}{\sqrt{x}-1}$ **.** **(3 μον.)**

Θέμα 4^o:

Α. Ο σούπερμαν στην προσπάθεια του να βοηθήσει μια κοπέλα εκτινάσσεται από το έδαφος και διαγράφει κίνηση της οποίας η τροχιά δίνεται από τη συνάρτηση : $x(t)=t\cdot\left(t^2-\dfrac{15t}{2}+18\right)$

(όπου t ο χρόνος σε sec).

i. Να εκφράσετε την ταχύτητα του σούπερμαν συναρτήσει του χρόνου . **(2 μον.)**

ii. Ποια είναι η επιτάχυνση του σούπερμαν και το μέτρο της επιτάχυνσης σε χρόνο t=2sec ; **(2 μον.)**

iii. Πότε ο σούπερμαν είναι (στιγμιαία ακίνητος) ; **(2 μον.)**

iv. Πότε κινείται κατά τη θετική (πάνω) και πότε κατά την αρνητική κατεύθυνση (κάτω) ; **(2 μον.)**

v. Να βρείτε το ολικό διάστημα που θα διανύσει κατά τη διάρκεια των πρώτων 4 sec . **(4 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}, \quad x\in\mathbb{R}$.

i. Να υπολογίσετε τις $f'(x)$ και $f''(x)$. **(3 μον.)**

ii. Να δείξετε ότι $2f'(x)+f''(x)=-f(x)$. **(2 μον.)**

iii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$ είναι η ευθεία

$$y=\left(\frac{2-\alpha}{e^{\alpha}}\right)x+\frac{\alpha^2-\alpha-1}{e^{\alpha}} \ .$$ **(5 μον.)**

iv. Να βρείτε την τιμή του α>0 ώστε η εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης να διέρχεται από την αρχή των αξόνων . **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^o:

Α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται συνεχής αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Β. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

Γ. Την οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας ενός κινητού την ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική t_0 ή απλώς ταχύτητα του κινητού στο t_0 , δηλαδή $\upsilon = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta S}{h}$.

Δ. Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Τότε $F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \right] =$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \right] =$$

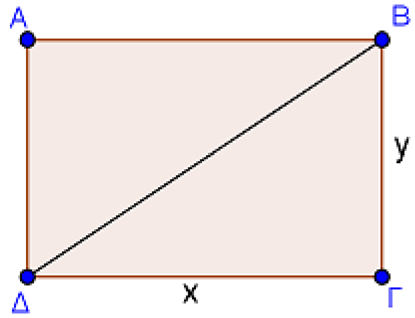
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \overset{f, g \text{ παραγωγίσιμες}}{=}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] + \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Ε . **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.** Λ

Θέμα 2ο:



i. Έχουμε το διπλανό ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τη διαγώνιό του . Για να το κατασκευάσουμε χρησιμοποιήσαμε σύρμα μήκους 200cm οπότε έχουμε $2x+2y=200 \Leftrightarrow x+y=100 \Leftrightarrow$ $y=100-x$.

Για τις διαστάσεις του ορθογωνίου πρέπει x>0 και 100-x>0 οπότε $x\in(0,100)$.

Τότε από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε :

$$B\Delta^2=B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2 \Rightarrow B\Delta=\sqrt{B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2}$$

Οπότε η διαγώνιος ως συνάρτηση του x γράφεται :

$$d(x)=\sqrt{x^2+(100-x)^2}=\sqrt{x^2+10000-200x+x^2}=$$
$$=\sqrt{2x^2-200x+10000},\quad x\in(0,100)$$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της d(x) είναι :

$$d'(x)=\left(\sqrt{2x^2-200x+10000}\right)'=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2x^2-200x+10000}}\cdot(2x^2-200x+10000)'=$$
$$\frac{4x-200}{2\sqrt{2x^2-200x+10000}}=\frac{2x-100}{\sqrt{2x^2-200x+10000}}\quad ,\ x\in(0,100)$$

iii. Είναι $d'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-100=0 \Leftrightarrow 2x=100 \Leftrightarrow x=50$.

Άρα όταν $d'(x)=0$ το μήκος του ορθογωνίου είναι x=50 και το πλάτος είναι y=100-50=50 .

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. i. Εφόσον η f είναι συνεχής στο x=1 θα είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ **(1)**

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)(x+1-2)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\cdot(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=2$$

Άρα f(1)=2.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο Α(1,f(1)) είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ (2). Είναι $f(1)=2$.

Επίσης $f'(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$ οπότε :

$f'(1)=(1-2)(1-3)(1-4)=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)=-6$

Τότε η (2) $\Rightarrow y-2=-6(x-1)\Leftrightarrow y-2=-6x+6\Leftrightarrow$

$y=-6x+8$.

Β. Είναι $g(x)=\dfrac{x^2-3}{x-\alpha},\quad x\neq\alpha$

Εφόσον η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο Β(1,g(1))
Είναι παράλληλη στον x΄x θα είναι g΄(1)=0 (1)

Έχουμε $g'(x)=\left(\dfrac{x^2-3}{x-\alpha}\right)'=\dfrac{(x^2-3)'(x-\alpha)-(x^2-3)(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2}=$

$$=\frac{2x(x-\alpha)-x^2+3}{(x-\alpha)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2\alpha x-x^2+3}{(x-\alpha)^2}=\frac{x^2-2\alpha x+3}{(x-\alpha)^2}\ ,\ x\neq\alpha\ .$$

Τότε από την (1) $\Rightarrow g'(1)=0 \Leftrightarrow 1-2\alpha+3=0 \Leftrightarrow -2\alpha=-4 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}$

ii. Για α=2 είναι $g(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ και $g'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2},\quad x\neq 2$

Τότε : $(x-2)^2 g'(x)+(x-2)g(x)-2x^2+4x=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{(x-2)^2(x^2-4x+3)}{(x-2)^2}+(x-2)\cdot\frac{x^2-3}{(x-2)}-2x^2+4x=0 \Leftrightarrow$$

$x^2-4x+3+x^2-3-2x^2+4x=0 \Leftrightarrow$

0=0 που ισχύει .

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g'(x)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2(\sqrt{x}-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+1)}{(x-2)^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+1)}{(x-2)^2(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-3)(\sqrt{x}+1)}{(x-2)^2}=\frac{-2\cdot2}{1}=-4$$

Θέμα 4ο:

Α. i. Η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης , οπότε :

$$\upsilon(t)=x'(t)=\left[t\cdot\left(t^2-\frac{15t}{2}+18\right)\right]'=\left(t^3-\frac{15t^2}{2}+18t\right)'\Rightarrow$$

$$\upsilon(t)=3t^2-15t+18,\quad t>0$$

ii. Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ,

οπότε $\alpha(t)=\upsilon'(t)=(3t^2-15t+18)'=6t-15$

Για t=2sec είναι $\alpha(2)=6\cdot 2-15=-3m/s^2$ και $|\alpha(2)|=3m/s^2$.

iii. Ο σούπερμαν είναι (στιγμιαία) ακίνητος όταν :

$\upsilon(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-15t+18=0\Leftrightarrow 3(t^2-5t+6)=0\Leftrightarrow$

$t=2sec$ ή $t=3sec$.

iv. Ο σούπερμαν κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση όταν

$\upsilon(t)>0\Leftrightarrow t^2-5t+6>0\overset{\text{ομ.του α}}{\Leftrightarrow} t<2sec$ ή $t>3sec$ ενώ κατά την αρνητική όταν $\upsilon(t)<0\Leftrightarrow 2<t<3$.

v. Ο σούπερμαν από t=0 sec έως t=2sec κινείται προς τα πάνω και διανύει διάστημα :

- $S_1=|x(2)-x(0)|=|14-0|=14m$

Από $t=2sec$ έως t=3sec κινείται προς τα κάτω και διανύει διάστημα :

- $S_2=|x(3)-x(2)|=|13,5-14|=0,5m$

Από t=3sec έως t=4sec κινείται προς τα πάνω και διανύει διάστημα :

- $S_3=|x(4)-x(3)|=|16-13,5|=2,5m$

Το ολικό διάστημα που διανύει από t=0sec έως t=4sec είναι

$S_{ΟΛ}=S_1+S_2+S_3=14+0,5+2,5=17m$

B. Είναι $f(x)=\dfrac{x-1}{e^{x}},\quad x\in\mathbb{R}$

i. ● $f'(x)=\left(\dfrac{x-1}{e^{x}}\right)'=\dfrac{(x-1)'\cdot e^{x}-(x-1)(e^{x})'}{e^{2x}}=\dfrac{e^{x}-(x-1)\cdot e^{x}}{e^{2x}}=$

$=\dfrac{e^{x}(1-x+1)}{e^{2x}}=\dfrac{2-x}{e^{x}}$ δηλ. $\boxed{f'(x)=\dfrac{2-x}{e^{x}},\quad x\in\mathbb{R}}$

● $f''(x)=\left(\dfrac{2-x}{e^{x}}\right)'=\dfrac{(2-x)'\cdot e^{x}-(2-x)(e^{x})'}{e^{2x}}=\dfrac{-e^{x}-(2-x)e^{x}}{e^{2x}}=$

$=\dfrac{e^{x}\ \ -1-2+x}{e^{2x}}=\dfrac{x-3}{e^{x}}$ δηλ. $\boxed{f''(x)=\dfrac{x-3}{e^{x}},\quad x\in\mathbb{R}}$

ii. Είναι $2f'(x)+f''(x)=2\cdot\dfrac{(2-x)}{e^{x}}+\dfrac{x-3}{e^{x}}=$

$=\dfrac{4-2x+x-3}{e^{x}}=\dfrac{-x+1}{e^{x}}=-\dfrac{(x-1)}{e^{x}}=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha,f(\alpha))$

είναι $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ **(1)**

Έχουμε $f(\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{e^{\alpha}}$ και $f'(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{e^{\alpha}}$

Οπότε η (1)$\Rightarrow$ $y-\left(\dfrac{\alpha-1}{e^{\alpha}}\right)=\left(\dfrac{2-\alpha}{e^{\alpha}}\right)x-\alpha\ \Rightarrow$

$y-\left(\dfrac{\alpha-1}{e^{\alpha}}\right)=\left(\dfrac{2-\alpha}{e^{\alpha}}\right)x-\alpha\left(\dfrac{2-\alpha}{e^{\alpha}}\right)\Rightarrow$

$y=\left(\dfrac{2-\alpha}{e^{\alpha}}\right)x-\dfrac{2\alpha-\alpha^{2}}{e^{\alpha}}+\dfrac{\alpha-1}{e^{\alpha}}\Rightarrow$

$$y = \left(\frac{2-\alpha}{e^{\alpha}}\right)x + \frac{\alpha^2-\alpha-1}{e^{\alpha}} \quad \textbf{(2)}$$

iv. Για να διέρχεται η εφαπτομένη από την αρχή των αξόνων πρέπει να επαληθεύεται από το O(0,0) .Οπότε η (2) για x=0 , y=0 δίνει : $0 = 0 + \frac{\alpha^2-\alpha-1}{e^{\alpha}} \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-1=0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5 > 0$

Οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις :

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Όμως α>0 άρα τελικά $\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$