# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ον/μο:………………..** **Γ΄ Λυκείου**

**Ύλη: Συναρτήσεις-Παράγωγοι** **Θετ.-Τεχν. Κατ.**

**05-02-12**

## <u>Ζήτημα 1ο:</u>

**Α.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ

Αν ● Η f είναι συνεχής στο Δ

● $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ. **(Μον.8)**

**Β.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία **(Μον.4)**

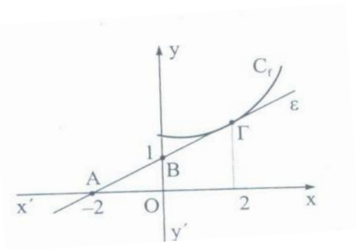
**Γ.** Να δώσετε τον ορισμό της παραγωγίσιμης συνάρτησης f , σε ένα κλειστό διάστημα του πεδίου ορισμού της . **(Μον.3)**

**Δ.** Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις :

**1.** Αν $f(2x-3)=x^2-5x+7$ , τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=-\frac{3}{2}$$ **Σ Λ**

**2.** Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο Γ(2,ψ) και διέρχεται από τα σημεία Α(-2,0) , Β(0,1) .Αν $g(x)=x^3f(x)$, τότε $g'(2)=-28$




**Σ Λ**

**3.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\eta\mu\lambda$ και και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda$ , τότε η f έχει όριο στο $x_0$ , αν και μόνο αν λ=0 **Σ Λ**

**4.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα Δ τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f΄ υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f . **Σ Λ**

**5.** Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to N$ δεν είναι σταθερή , τότε δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ **Σ Λ**

**( Μον.10)**

## Ζήτημα 2$^o$:

**Α.** Αν $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής , μη σταθερή και α<γ<δ<β να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε :
$f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\delta)+4f(\beta)=10f(\xi)$ **(Μον.6)**

**Β.** Η συνάρτηση f ικανοποιεί στο $[1,2]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano .Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^3(x)+4f^2(x)+5f(x)=x^2-3x+2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2) **(Μον.6)**

**Γ.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+e^x+\ln x=4$ έχει μοναδική ρίζα **(Μον.6)**

**Δ.** Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση τέμνει τον x΄x στο Μ(-2 ,0) .Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x^4-x^3-x^2-x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2) **(Μον.7)**

## Ζήτημα 3$^o$:

**Α.** Δίνονται η ευθεία $\zeta: y=-6x-3$ και η καμπύλη $C: y=x^4+x^2+8$.

**1.** Να δείξετε ότι η ευθεία (ζ) δεν τέμνει την καμπύλη (C) **(Μον.6)**

**2.** Να βρείτε το σημείο Μ της C στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη της (ζ) . **(Μον.6)**

**3.** Αν Μ(-1,10) , να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της καμπύλης (C) από την (ζ) . **(Μον.6)**

**Β.** Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $\alpha,\beta\in R(\alpha<\beta)$ με f(α)=f(β)=0. Αν $f(c)>0$ για ένα $c\in(\alpha,\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)<0$
**(Μον.7)**

## Ζήτημα 4$^o$:

Συνάρτηση f ορίζεται στο A=(0,+$\infty$) και για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(\alpha\cdot\beta)=\alpha\cdot f(\beta)+\beta\cdot f(\alpha)$ **(1)**

**1.** Να δείξετε ότι f(1)=0 **(Μον.3)**

**2.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=1$ με $f'(1)=2012$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A και για κάθε x>0 ισχύει $xf'(x)-f(x)=2012x$ **(Μον.8)**

**3.** Να βρείτε τον τύπο της f **(Μον.7)**

**4. Αν** $f(x)=2012\cdot x\cdot\ln x$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\ln x)=0$ να βρείτε πόσες ρίζες έχει η f **(Μον.7)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

## Ζήτημα 1ο:

**Α.** Θεωρία **Β.** Θεωρία **Γ.** Θεωρία

**Δ.** 1Σ , 2Λ , 3Σ , 4Λ , 5Σ

## Ζήτημα 2ο:

**Α.** Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (M) τιμή . Έτσι θα ισχύει :

$$\left.\begin{array}{l} m\le f(\alpha)\le M \\ m\le f(\gamma)\le M \\ m\le f(\delta)\le M \\ m\le f(\beta)\le M \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m\le f(\alpha)\le M \\ 2m\le 2f(\gamma)\le 2M \\ 3m\le 3f(\delta)\le 3M \\ 4m\le 4f(\beta)\le 4M \end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$10m\le f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\delta)+4f(\beta)\le 10M$$

$$\Rightarrow m\le \frac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\delta)+4f(\beta)}{10}\le M$$

Άρα , σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ , υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f(\xi)=\frac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\delta)+4f(\beta)}{10}$$ δηλαδή

$$f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\delta)+4f(\beta)=10\cdot f(\xi).$$

**Β.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^3(x)+4f^2(x)+5f(x)-x^2+3x-2$

ή $g(x)=f(x)\cdot\left[f^2(x)+4f(x)+5\right]-x^2+3x-2$

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ως πράξεις συνεχών .
- $g(1)=f(1)\cdot\left[f^2(1)+4f(1)+5\right]$ , $g(2)=f(2)\cdot\left[f^2(2)+4f(2)+5\right]$

Τα τριώνυμα $f^2(1)+4f(1)+5$ και $f^2(2)+4f(2)+5$ έχουν Δ<0 είναι επομένως θετικά .Επίσης $f(1)\cdot f(2)<0$ οπότε και $g(1)\cdot g(2)<0$ .Σύμφωνα λοιπόν με το θ.Bolzano για την g , υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0\in(1,2)$ ώστε $g(x_0)=0$

**Γ.** Η εξίσωση $x^3+e^x+\ln x=4$ γράφεται $x^3+e^x+\ln x-4=0$ . Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=x^3+e^x+\ln x-4$ που έχει $A=(0,+\infty)$ στο οποίο είναι συνεχής .Έχει :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+e^x+\ln x-4)=0+1+(-\infty)-4=-\infty$ ,

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3+e^x+\ln x-4)=(+\infty)+(+\infty)+(+\infty)-4=+\infty$

Άρα σύνολο τιμών f(A)=R στο οποίο περιέχεται το 0 . Η f λοιπόν έχει τουλάχιστον μία ρίζα .

Επίσης $f'(x)=3x^2+e^x+\dfrac{1}{x}>0$ , άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα είναι μοναδική .

**Δ.** Η εξίσωση $f(x^4-x^3-x^2-x)=0$ γράφεται

$f(x^4-x^3-x^2-x)=f(-2)\overset{f\ \text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} x^4-x^3-x^2-x=-2\Leftrightarrow$

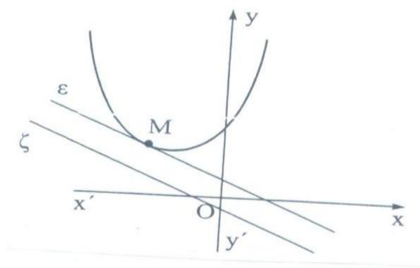
$\Leftrightarrow x^4-x^3-x^2-x+2=0\overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}(x-1)\cdot(x^3-x-2)=0$

Η συνάρτηση $g(x)=x^3-x-2$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ με g(1)=-2 , g(2)=4 οπότε , από το Θ.Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει μια ρίζα της g στο(1,2) Άρα και η αρχική εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

## Ζήτημα 3$^o$:

**Α. 1.** Από το σύστημα $\left.\begin{aligned} y&=-6x-3\\ y&=x^4+x^2+8\end{aligned}\right\}\Rightarrow x^4+x^2+8=-6x-3\Leftrightarrow$

$x^4+x^2+6x+11=0\Leftrightarrow x^4+(x^2+6x+11)=0$ .Το τριώνυμο $x^2+6x+11$ έχει $\Delta=6^2-4\cdot 1\cdot 11=36-44<0$ άρα είναι θετικό . Η εξίσωση λοιπόν είναι αδύνατη . Έτσι η (ζ) και η (C) δεν έχουν κοινά σημεία .




**2.** Αν $f(x)=x^4+x^2+8$ και $M(x_0,f(x_0))$.
το ζητούμενο σημείο τότε $f'(x_0)=-6 \Rightarrow$
$4x_0^3+2x_0=-6 \Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0+6=0 \Leftrightarrow$

$2x_0^3+x_0+3=0$ με προφανή ρίζα την
$x_0=-1$ και μοναδική γιατί η
g(x)=$2x^3+x+3$ έχει $g'(x)=6x^2+1>0$ άρα είναι $\nearrow$
Το σημείο είναι το M(-1,0).

**3.** Είναι d(M,ζ)=$\dfrac{|6\cdot(-1)+10+3|}{\sqrt{6^2+1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{37}}$

**B.** ●Η f είναι συνεχής στα $[\alpha,c]$, $[c,\beta]$
●Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(\alpha,c)$, $(c,\beta)$
Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,c)$, $\xi_2\in(c,\beta)$ ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0 \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(c)}{\beta-c}=-\frac{f(c)}{\beta-c}<0 \quad (1)$$

Ακόμη:
● Η $f'$ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$
● Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi_1,\xi_2)$
Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ∈ $(\xi_1,\xi_2)$ ώστε:

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0 \text{ αφού } f'(\xi_1),\ f'(\xi_2)<0 \text{ και } \xi_2-\xi_1>0$$

**Ζήτημα 4$^o$:**

**1.** Η (1) , για α=β=1 γίνεται f(1)=f(1)+f(1) δηλ. **f(1)=0**

**2.** Αν $x_o > 0,\ x_o \neq x$ τότε:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \overset{\frac{x}{x_o}=y}{=\!=\!=} \lim_{x\to x_o}\frac{f(x_oy)-f(x_o)}{x_oy-x_o} \overset{(1)}{=} \lim_{y\to 1}\frac{x_of(y)+yf(x_o)-f(x_o)}{x_o(y-1)} =$$

$$\lim_{y\to 1}\left[\frac{x_of(y)}{x_o(y-1)}+\frac{(y-1)f(x_o)}{x_o(y-1)}\right] = \lim_{y\to 1}\left[\frac{f(y)-f(1)}{y-1}+\frac{f(x_o)}{x_o}\right] = f'(1)+\frac{f(x_o)}{x_o} =$$

$= 2012+\dfrac{f(x_o)}{x_o} \in$ R για κάθε $x_o$>0 οπότε και $f'(x)=2012+\dfrac{f(x)}{x}$,

$\delta\eta\lambda.\ xf'(x)-f(x)=2012x$ (2).

**3.** Απ΄ την (2) είναι:

$$\frac{xf'(x)-f(x)(x')}{x^2}=\frac{2012x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(2012\ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x}=2012\ln x+c \quad \textbf{(3)}$$

Για χ=1 , απ΄ την (3) είναι 0=0+c δηλ.c=0 άρα $\dfrac{f(x)}{x}=2012\ln x$ δηλ.

**f(x)=2012 x lnx**

**4.** Η f(x)=2012xlnx έχει

$f'(x)=2012x\ln x+2012=2012(\ln x+1)$, ρίζα την x=e$^{-1}$

και πρόσημο καθώς και μονοτονία όπως φαίνεται στον πίνακα.

Η f έχει ελάχιστο

το $f(e^{-1})=2012e^{-1}\ln e^{-1}=-\dfrac{2012}{e}$

| x | 0 | | $e^{-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | − | 0 | + | |
| f | 0 | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

Αν $A_1=\left(0,e^{-1}\right]$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $f(A_1)=\left(0,-\dfrac{2012}{e}\right]$ στο

οποίο περιέχεται το μηδέν ,οπότε η f – λόγω της μονοτονίας– έχει στο $A_1$ μία ρίζα.

Το $1\in(e^{-1},+\infty)$, f(1)=0 και λόγω της μονοτονίας είναι κι αυτό μοναδική ρίζα στο $(e^{-1},+\infty)$.

Η f λοιπόν έχει ακριβώς δύο ρίζες.