ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

139

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **Γεν. Παιδείας**

10/09/2013

Θέμα 1ο :

Α. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής ; **(6 μον.)**

Β. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α , παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$; **(4 μον.)**

Γ. Τι ορίζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού ; **(2 μον.)**

Δ. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες να δείξετε ότι : $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$. **(8 μον.)**

Ε. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Η σχέση $x^2+y^2=1$ όπου $x,y\in\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση . **Σ Λ**

ii. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε $f(3)>f(5)$. **Σ Λ**

iii. Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2013+h)-f(2013)}{h}$ υπάρχει και είναι ίσο με 2 τότε $f'(2013)=2$. **Σ Λ**

iv. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

v. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu(-x)$, τότε $f'(x)=\eta\mu x$. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μεταβάλλεται έτσι ώστε το άθροισμα της βάσης του και του ύψους του να είναι σταθερό και ίσο με 50cm .

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει της βάσης του x είναι $E(x)=25x-\dfrac{x^2}{2}$, $0<x<50$. **(6 μον.)**

ii. Να βρείτε το μήκος της βάσης του , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο . Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου . **(7 μον.)**

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{2014}$.

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2014}-1}{h}$. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$. **(5 μον.)**

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-2014x^{2012}}{x-1}$. **(3 μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\alpha x^2-\beta x+6,\quad x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ της οποίας η εφαπτομένη στο σημείο Μ(3,6) είναι παράλληλη στον x΄x .

Α. Να δείξετε ότι α=-2 και β=-3. **(8 μον.)**

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(7 μον.)**

Γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)}{f''(x)+x^2-10x+19}$. **(6 μον.)**

Δ. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος . **(4 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\kappa x}+\lambda\cdot e^{x},\quad x\in\mathbb{R}$, όπου κ είναι το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^3-x^2}$ και λ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x)=x\cdot\ln x,\quad x>0$.

Α. Να υπολογίσετε τους αριθμούς κ και λ . **(6 μον.)**

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα . **(3 μον.)**

Γ. Να δείξετε ότι : $2ex^2\ln x+2x\geq 0$ για κάθε x>0. **(6 μον.)**

Δ. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Μ(e,g(e)) . **(4 μον.)**

Ε. Αν η εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της g τέμνει τους άξονες στα σημεία Α , Β να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ. **(6 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

Α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται συνεχής αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Β. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

Γ. Την οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας ενός κινητού την ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική t_0 ή απλώς ταχύτητα του κινητού στο t_0 , δηλαδή $\upsilon = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta S}{h}$.

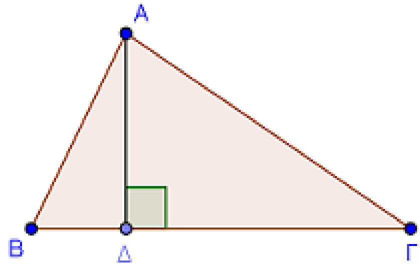
Δ. Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Τότε
$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \overset{f,g\ \text{παραγωγίσιμες}}{=}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

Ε . **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.** Λ

Θέμα 2ο:

Α. Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο και ΑΔ το ύψος του .
Τότε αν θεωρήσουμε ΒΓ=x και ΑΔ=h
έχουμε ότι : x+h=50 ⇔ h=50-x .



i. Είναι $E_{τριγ}=\dfrac{β\cdot υ}{2}=\dfrac{x\cdot h}{2}$ δηλαδή το εμβαδόν του τριγώνου

συναρτήσει του x είναι $E(x)=\dfrac{x\cdot(50-x)}{2}=\dfrac{50x-x^2}{2}=25x-\dfrac{x^2}{2}$

πρέπει $x>0$ και $50-x>0$ οπότε $0<x<50$ δηλαδή

$E(x)=25x-\dfrac{x^2}{2}$, $0<x<50$.

ii. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $E(x)=25x-\dfrac{x^2}{2}$, $0<x<50$.

Βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης .

$E'(x)=25-x$.Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου.

$E'(x)=0\Leftrightarrow 25-x=0\Leftrightarrow x=25$.

Τότε ο πίνακας προσήμων της Ε΄ είναι :

x	0		25		50
Ε΄	‖	+	0	-	‖
Ε	‖	↗	Τ.Μ	↘	‖

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι το εμβαδόν τριγώνου γίνεται μέγιστο όταν το μήκος της βάσης είναι

x=25 . Το μέγιστο Εμβαδό είναι $E(25)=25^2-\dfrac{25^2}{2}=312,5$τ.μ.

Β. i Είναι $f(x)=x^{2014}$.

Τότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2014}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$.

Είναι $f'(x)=2014x^{2013}$ οπότε $f'(1)=2014$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$ είναι :

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ (1) .

Οπότε $f(1)=1^{2014}=1$ και $f'(1)=2014$

άρα η (1) $\Rightarrow y-1=2014(x-1)\Leftrightarrow y=2014x-2013$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

iii. Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\left(x^{2014}\right)'=2014x^{2013}$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-2014x^{2012}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2014x^{2013}-2014x^{2012}}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2014x^{2012}(x-1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}2014x^{2012}=2014$.

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Είναι $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\alpha x^2-\beta x+6,\quad x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=x^2+2\alpha x-\beta$.

Εφόσον η C_f δέχεται εφαπτομένη στο Μ(3,6) θα είναι

$f(3)=6\Leftrightarrow 9+9\alpha-3\beta+6=6\Leftrightarrow 9\alpha-3\beta=-9\Leftrightarrow 3\alpha-\beta=-3\ (1)$

Επίσης εφόσον η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον x΄x

Έχουμε : $f'(3)=0\Leftrightarrow 9+6\alpha-\beta=0\Leftrightarrow 6\alpha-\beta=-9\ (2)$

Από (1) και (2) προκύπτει :

$\begin{matrix}3\alpha-\beta=-3\\ 6\alpha-\beta=-9\end{matrix}\overset{(-)}{\Leftrightarrow}\begin{matrix}-3\alpha=6\\ 6\alpha-\beta=-9\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\alpha=-2\\ \beta=-3\end{matrix}$

Β. Για α=-2 και β=-3 έχουμε :

$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x+3x+6$ και $f'(x)=x^2-4x+3$.

Βρίσκουμε τις ρίζες της f ΄: $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x=3$. Ο πίνακας προσήμων της f΄ είναι :

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
f΄	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗
		Τ.Μ		Τ.Ε	

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Η f είναι Ζ στα $-\infty,1$ και $3,+\infty$ ενώ είναι] στο $1,3$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 το $f(1)=\frac{1}{3}-2+3+6=\frac{22}{3}$

και τοπικό ελάχιστο στο 3 το $f(3)=9-18+9+6=6$.

Γ. Είναι : $f''(x)=(x^2-4x+3)'=2x-4$.

Οπότε : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f'(x)}{f''(x)+x^2-10x+19}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-4+x^2-10x+19}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-8x+15}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x-5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x-5}=-1.$$

Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η παράγωγος της , δηλαδή η f΄ .Θα μελετήσουμε την f΄ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Για τις ρίζες της f΄΄ έχουμε :

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$.Ο πίνακας προσήμων της f΄΄ είναι :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f΄΄	-	0	+
f΄	↘		↗
		Ο.Ε	

Η f ΄ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=2 .Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για x=2 .

<u>Θέμα 4^ο:</u>

Α. Για το κ έχουμε :

$$\kappa=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^3-x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to 1}-\frac{(1+x)}{x^2}=-2 \text{ δηλ. } \boxed{\kappa=-2}$$

Για το λ έχουμε : $g(x)=x\cdot\ln x,\quad x>0$

- $g'(x)=(x\cdot\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$, x>0
- $g'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

- $g'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} e^{\ln x}>e^{-1} \Leftrightarrow x>e^{-1}$
- Ο πίνακας προσήμων της g' είναι :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
g'	‖	-	0	+	
g	‖	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=e^{-1}$ το
$g(e^{-1})=e^{-1}\cdot\ln e^{-1}=-e^{-1}$. Οπότε $\boxed{\lambda=-e^{-1}}$

Β. Για $\kappa=-2$ και $\lambda=-e^{-1}$ είναι :

$f(x)=e^{-2x}-e^{-1}\cdot e^{x} \Rightarrow f(x)=e^{-2x}-e^{x-1}$

Τότε $f'(x)=(e^{-2x}-e^{x-1})'=e^{-2x}\cdot(-2x)'-e^{x-1}\cdot(x-1)'=$

$$=-2e^{-2x}-e^{x-1}=-\underbrace{(2e^{-2x}+e^{x-1})}_{>0}<0$$

Εφόσον $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και δεν παρουσιάζει ακρότατα .

Γ. Εφόσον η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=e^{-1}$ θα

είναι $g(x)\geq g(e^{-1}) \Leftrightarrow x\cdot\ln x\geq -e^{-1} \Leftrightarrow x\cdot\ln x\geq -\dfrac{1}{e} \overset{\cdot e}{\Leftrightarrow}$

$e\cdot x\cdot\ln x\geq -1 \underset{x>0}{\overset{\cdot 2x}{\Leftrightarrow}} 2ex^2\ln x\geq -2x \Leftrightarrow 2ex^2\ln x+2x\geq 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$

Δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο Μ(e,g(e)) είναι $\varepsilon: y-g(e)=g'(e)(x-e)$ (1) . Οπότε
$g(e)=e\cdot\ln e=e$ και $g'(e)=\ln e+1=2$
Τότε η (1)$\Rightarrow \varepsilon: y-e=2(x-e) \Rightarrow \boxed{y=2x-e}$

Ε. Η $y=2x-e$ τέμνει τον $x'x$ όταν y=0 . Οπότε

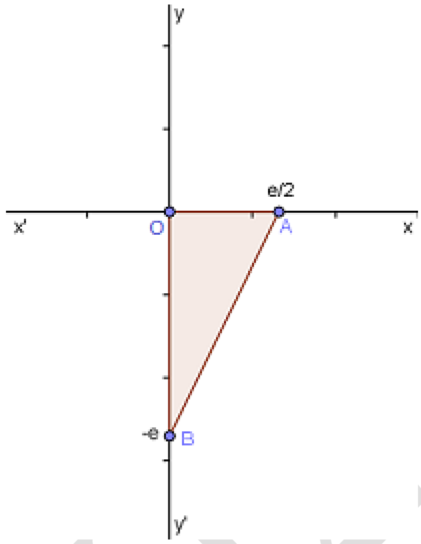
$0=2x-e \Leftrightarrow 2x=e \Leftrightarrow x=\dfrac{e}{2}$. Άρα $A\left(\dfrac{e}{2},0\right)$.

Επίσης τέμνει τον $y'y$ όταν x=0 δηλαδή στο $B(0-e)$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Το τρίγωνο ΑΟΒ που σχηματίζεται έχει εμβαδόν :

$$\text{AOB} = \frac{|\beta \cdot \upsilon|}{2} = \frac{\left|-e \cdot \frac{e}{2}\right|}{2} = \frac{e^2}{4} \ \tau.\mu$$



ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ