ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ον/μο:……………….. Γ΄ Λυκείου

Ύλη: Μιγαδικοί-Συναρτήσεις-Παράγωγοι Θετ.-Τεχν. Κατ.

11-12-11

Ζήτημα 1ο:

Α. Για την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, να βρείτε το διάστημα στο οποίο είναι παραγωγίσιμη καθώς και την παράγωγό της.

(Μον.10)

Β. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις ερωτήσεις:

1. Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f ,που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x. **Σ Λ**

2. Αν η γραφική παράσταση C_f συνάρτησης f κόβεται σ' ένα σημείο x_o, τότε η f δεν είναι συνεχής σ' αυτό. **Σ Λ**

3. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}$, για κάθε συνάρτηση g. **Σ Λ**

4. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο [α, β] και f(α)·f(β)>0 τότε η εξίσωση f(x)=0 δεν έχει καμία ρίζα στο (α, β). **Σ Λ**

5. Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη. **Σ Λ**

(Μον.5)

Γ. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν $f(x)=x^3+\alpha x^2+2x$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ τότε το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι:

α. $3\alpha^2+2$ **β.** $4\alpha^2+2$ **γ.** $5\alpha^2+2$ **δ.** α^2+2 **ε.** $8\alpha^2+2\alpha$

2. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4^x+5^x+6}$ είναι ίσο με:

α) 0 **β)** 1 **γ)** 2 **δ)** 3 **ε)** 4

3. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)=x^3+f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$. Η f έχει σίγουρα ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα [-2,3] όταν:

α. $f(0)=-\dfrac{3}{2}$ **β.** $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ **γ.** $f(0)=\dfrac{1}{2}$ **δ.** $f(0)=\dfrac{3}{2}$ **ε.** $f(0)=0$

4. Η ευθεία ε: $y=16x+2\gamma+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ στο σημείο Α(-1,-4). Το άθροισμα α+β+γ είναι ίσο με:

α.2 **β.**3 **γ.**4 **δ.**5 **ε.**6

5.Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x)=2x+1$.

Το (fof) (3) είναι:

α.-1 **β.**0 **γ.**$\dfrac{1}{2}$ **δ.**1 **ε.**2

(Μον.10)

Ζήτημα 2^o:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+x+\alpha^2, & x<0\\ x^3+\alpha x+1, & x\geq 0\end{cases},\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Για ποιές τιμές του α η f είναι συνεχής στο x_o=0;

ii) Για ποιές τιμές του α είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0;

(Μον.10)

Β. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων.

i) $f(x)=2^{5x-3}$ **ii)** $f(x)=x^3\eta\mu^3(\pi x)$ **iii)** $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

(Μον.15)

Ζήτημα 3ο:

Α.i) Αν g παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και ισχύει

$g^5(x)+x^2g^3(x)+x^4g(x)=3x^5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε

ότι $g'(0)=1$, αν γνωρίζετε ότι $g'(0)>0$. **(Μον.7)**

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο M(0, g(0)) **(Μον.2)**

iii) Να εξετάσετε αν η C_f της $f(x)=\frac{1}{3}x^3$ έχει εφαπτόμενες παράλληλες στην εφαπτομένη του **ii)** ερωτήματος. **(Μον.3)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=-2x^5-|z|\cdot x^3+2|z|^5$, $x\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}^*$.

i) Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την f. **(Μον.3)**

ii) Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f. **(Μον.3)**

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\Delta=(0,|z|)$. **(Μον.3)**

iv) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)+2|z|^5}{\eta\mu^3 x}=1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z. **(Μον.4)**

Ζήτημα 4ο:

Α. Δίνεται η συνεχής το $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=2.$$

i) Να αποδείξετε ότι η C_f περνάει από το σημείο M(1,1).

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}$ **(Μον.10)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=2|z-xi|+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου z μιγαδικός με $|z|=2$ και $-2<\mathrm{Im}(z)<2$.

Να δείξετε ότι:

i) $f(x)=2\cdot\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)\cdot x+4}+1$**,** για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Η f είναι συνεχής στο R.

iii) Υπάρχει $x_o\in(0,5)$ ώστε $f(x_0)=6$. **(Μον.15)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Ζήτημα 1ο:

Α. Η $f(x)=\sqrt{x}$ έχει Π.Ο. το Α=[0,+∞).

- Αν x>0, x_o>0 τότε

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}=\frac{1}{2\sqrt{x_o}}\in\mathbb{R}$$

- Αν x_o=0 τότε $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

Η f λοιπόν είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Β. 1Σ, 2Λ, 3Λ, 4Λ, 5Σ.

Γ. 1γ, 2β, 3ε, 4ε, 5β.

Ζήτημα 2ο:

Α.i) Η f είναι συνεχής στο x_o=0 αν $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+x+\alpha^2\right)=\alpha^2,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^3+\alpha x+1\right)=1$$

και $f(0)=0^3+\alpha\cdot 0+1=1$. Πρέπει λοιπόν α^2=1 δηλ, <u>α=1ή α=-1</u>.

ii)● <u>Αν α=1</u> τότε $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, x<0\\ x^3+x+1, x\geq 0\end{cases}$ και

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(x^2+1\right)}{x}=1$$

<u>Η f λοιπόν-αν α=1- είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0.</u>

● Αν α=-1 τότε $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, x<0 \\ x^3-x+1, x\geq 0 \end{cases}$ και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=-1.$$

Οπότε, για α=-1 η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0.

B.i) Η $f(x)=2^{5x-3}$ έχει Α=$\mathbb{R}$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(2^{5x-3}\right)'=2^{5x-3}\cdot\ln 2\cdot(5x-3)'=5\cdot\ln 2\cdot 2^{5x-3}$$

ii) Η $f(x)=x^3\eta\mu^3(\pi x)$ έχει Α=$\mathbb{R}$ και παράγωγο σ' αυτό

$$f'(x)=[x^3\eta\mu^3(\pi x)]'=\left(x^3\right)'\cdot\eta\mu^3(\pi x)+x^3\left(\eta\mu^3(\pi x)\right)'=$$
$$=3x^2\cdot\eta\mu^3(\pi x)+x^3\cdot 3\eta\mu^2(\pi x)\cdot(\eta\mu(\pi x))'=$$
$$=3x^2\cdot\eta\mu^3(\pi x)+3x^3\eta\mu^2(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot(\pi x)'=$$
$$=3x^2\cdot\eta\mu^3(\pi x)+3\pi x^3\eta\mu^2(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x).$$

iii) Η $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$ με Α=$\mathbb{R}$ έχει παράγωγο

$$f'(x)=\left(\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=(\eta\mu x)'\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\cdot\left(e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=$$
$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'=$$
$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}-\eta\mu^2 x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$$

Ζήτημα 3^o:

A.i) Η ισότητα $g^5(x)+x^2\cdot g^3(x)+x^4\cdot g(x)=3x^5$ **(1)** για x=0 γίνεται $g^5(0)=0\Rightarrow g(0)=0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0 είναι και συνεχής σ' αυτό, άρα $\lim_{x\to 0} g(x)=0$.

Απ' την (1), αν x≠0 , διαιρώντας με x^5 έχουμε:

$$\left(\frac{g(x)}{x}\right)^5+\left(\frac{g(x)}{x}\right)^3+\frac{g(x)}{x}=3\Rightarrow$$
$$\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)^5+\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)^3+\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)=3$$

Και επειδή η g παραγωγίζεται στο $x_o=0$, παίρνοντας όρια έχουμε $\left(g'(0)\right)^5+\left(g'(0)\right)^3+\left(g'(0)\right)-3=0$ **(2)** Αν $g'(0)=\lambda$ η **(2)** γράφεται $\lambda^5+\lambda^3+\lambda-3=0$ και με τη βοήθεια του σχήματος Horner γράφεται:
$(\lambda-1)\left(\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+3\right)=0\Leftrightarrow\lambda-1=0$ ή $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+3=0$ **(3)**
άρα λ=1 δηλ. $g'(0)=1$.

Η (3) δεν μηδενίζεται γιατί $\lambda=g'(0)>0$.

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι :
$y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-0=1x$ δηλ. $\mathbf{\varepsilon: y=x}$

iii) Είναι $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$. Οι εφαπτόμενες της C_f που είναι παράλληλες στην ε:y=x θα έχουν συντελεστή διεύθυνσης 1 άρα πρέπει $f'(x_o)=1$ δηλ $x_o^2=1$ άρα $x_o=1$ ή $x_o=-1$. Η C_f λοιπόν <u>έχει δύο παράλληλες εφαπτόμενες</u> στην ε, στα σημεία Κ(1,f(1)) και Λ(-1,f(-1)).

B.i) Είναι $f'(x)=\left(-2x^5-|z|x^3+2|z|^5\right)'=-10x^4-3|z|x^2\le 0$ άρα <u>η f είναι ↓ στο A=$\mathbb{R}$</u>.

ii) Είναι : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^5-|z|x^3+2|z|^5\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^5\right)=+\infty$
και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^5\right)=-\infty$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο Α, ως πολυωνυμική, έχει σύνολο τιμών <u>$f(A)=\mathbb{R}$</u>.

iii) Είναι $f(0)=2|z|^5>0$, $f(|z|)=-2|z|^5-|z|\cdot|z|^3+2|z|^5=-|z|^4<0$ άρα $f(0)\cdot f(|z|)<0$, και από το Θ.Β. προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_o\in\Delta$ ώστε $f(x_o)=0$. Επειδή η f είναι ↓ το x_o είναι μοναδικό.

iv) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)+2|z|^5}{\eta\mu^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^5+|z|\cdot x^3-2|z|^5+2|z|^5}{\eta\mu^3 x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5+|z|\cdot x^3}{\eta\mu^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(2x^2+|z|\right)}{\eta\mu^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+|z|}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3}=\frac{0+|z|}{1^3}=|z|.$$

Άρα $|z|=1$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο μοναδιαιός κύκλος.

<u>Ζήτημα 4</u>

A.i) Θέτουμε $\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=g(x)$ οπότε

$f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot g(x)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1)$ (1).Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι και στο x_o=1 οπότε

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\left(x^2-1\right)\cdot g(x)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1)\right]=0\cdot 2+\sqrt{1}-0=1$$

Αφού $f(1)=1$, η C_f διέρχεται απ' το Μ(1,1).

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(3f(x)-2\right)=3\cdot f(1)-2=3\cdot 1-2=1>0$ άρα και $3f(x)-2>0$ κοντά στο x_o=1. Έτσι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-2-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-3}{x^2-1}=$$

$$\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3\left[\left(x^2-1\right)\cdot g(x)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1)-1\right]}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{3\left[\frac{g(x)}{x+1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)}-\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right]\right\}=$$

$$=3\cdot\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{4}-1\cdot\frac{1}{2}\right)=3\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=3\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

B.i) Είναι $|z-xi|^2=(z-xi)\cdot(\bar{z}+xi)=z\bar{z}+zxi-x\bar{z}i+x^2=$

$|z|^2+(z-\bar{z})\cdot x\cdot i+x^2=2^2+2\cdot \mathrm{Im}(z)\cdot i\cdot x\cdot i+x^2=$

$=x^2-2\,\mathrm{Im}(z)\cdot x+4$

Άρα $f(x)=2|z-xi|+1=2\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)\cdot x+4}+1, x\in\mathbb{R}$

γιατί $\Delta=(-2\,\mathrm{Im}(z))^2-4\cdot1\cdot4=4\,\mathrm{Im}^2(z)-16=4\left(\mathrm{Im}^2(z)-4\right)<0$ αφού $-2<\mathrm{Im}(z)<2$.

ii) Η $x^2-2\,\mathrm{Im}(z)\cdot x+4$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και η

$\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4}$, άρα και η f.

iii) Είναι: $f(0)=2|z-0\cdot i|+1=2|z|+1=2\cdot2+1=5$ και

$f(5)=2|z-5\cdot i|+1\geq 2\cdot\left(\left||z|-|5i|\right|\right)+1=2|2-5|+1=7$ δηλ

$f(5)\geq 7$

Αφού $f(0)=5$ και $f(5)\geq 7$ είναι $f(0)\neq f(5)$. Η f είναι συνεχής στο [0,5], το 6 είναι ενδιάμεση τιμή των f(0) και f(5), άρα υπάρχει $x_o\in(0,5)$ ώστε $f(x_o)=6$.