ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 138

Ον/μο:……………….. Γ'Λυκείου

Ύλη: Συναρτήσεις-Όρια –Μιγαδικοί Θετ-Τεχν. Κατ

02-10-11

ΖΗΤΗΜΑ 1^0

Α. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. **(Μον.10)**

Β. Να δώσετε τον ορισμό του συνόλου C των μιγαδικών αριθμών. **(Μον.5)**

Γ. Να σημειώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις:

1.Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|i\bar{z}|=|z|$ **Σ Λ**

2. Αν $|z|\le 2$, η μέγιστη τιμή του $|z-2009|$ είναι 2011. **Σ Λ**

3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_o και $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=0$,

τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$. **Σ Λ**

4.Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=l<0,\quad \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0$ και g(x)<0 κοντά στο x_o,

τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ **Σ Λ**

5. Μία συνάρτηση που είναι «1-1» στο διάστημα Δ είναι και γνησίως μονότονη σε αυτό. **Σ Λ**

(Μον.10)

ΖΗΤΗΜΑ 2^0

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{2}{z}=2,\ z\in C$ με $z\ne 0$.

1.Να βρείτε τις ρίζες z_1,z_2 της εξίσωσης. **(Μον.7)**

2.Να δείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$. **(Μον.6)**

3.Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. **(Μον.7)**

4.Να αποδείξετε ότι $3\le|w|\le 7$. **(Μον.5)**

ΖΗΤΗΜΑ 3^0

Α. Αν για κάθε x>0 ισχύει $4\sqrt{x} \le f(x) \le x+4$ να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-8}{x-4}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-8}{\sqrt{x+5}-3}$ **4.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|f(x)-5|-3}{x^2-5x+4}$

(Μον.16)

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x-|z|}-|z|,\ z\in C$.

1.Να δείξετε ότι αντιστρέφεται **(Μον.3)**

2.Αν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M(z). **(Μον.3)**

3.Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $5|z_1-z_2|-8\le 0$. **(Μον.3)**

ΖΗΤΗΜΑ 4^0

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+2$.

1.Να δείξετε ότι αντιστρέφεται. **(Μον.3)**

2.Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(4)$ **(Μον.3)**

3.Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=12$ και $f^{-1}(x)=-2$ **(Μον.4)**

4.Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες καθώς και με την ευθεία y=x. **(Μον.5)**

5.Να λύσετε την εξίσωση: $(2-\eta\mu^2 x)^3=\eta\mu^3 x+\eta\mu^2 x+\eta\mu x-2$. **(Μον.6)**

6.Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)<3$. **(Μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Ζήτημα 1^{ο}:

Α. Θεωρία **Β.** Θεωρία **Γ.** 1Σ , 2Σ , 3Σ , 4Λ , 5Λ.

Ζήτημα 2^{ο}:

1.Η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$ γράφεται $z^2-2z+2=0$, έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2=-4<0$ και ρίζες $z=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}\Rightarrow$ $z=1+i$ ή $z=1-i$

2.Είναι:

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(z_1^2)^{1005}+(z_2^2)^{1005}=[(1+i)^2]^{1005}+[(1-i)^2]^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$$

2^{ος} τρόπος:

Είναι:
$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=(1+i)^{2010}+[-i(1+i)]^{2010}$$
$$=(1+i)^{2010}+i^{2010}(1+i)^{2010}=(1+i)^{2010}+i^2(1+i)^{2010}=(1+i)^{2010}-(1+i)^{2010}=0$$

3.Είναι :
$$|w-4+3i|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow|w-(4-3i)|=|(1+i)-(1-i)|\Leftrightarrow$$
$$|w-(4-3i)|=|2i|\Leftrightarrow|w-(4-3i)|=2|i|\Leftrightarrow|w-(4-3i)|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) είναι κύκλος κέντρου K(4,-3) και ακτίνας ρ=2.

2^{ος} τρόπος:

Είναι $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$ και αν $w=x+yi$ τότε $|x+yi-4+3i|=|(1+i)-(1-i)|$ δηλαδή $|(x-4)+(y+3)i|=2\Leftrightarrow(x-4)^2+(y+3)^2=2^2$.

4.Είναι $|w-(4-3i)|=2$ και από τριγωνική ανισότητα

$|w-(4-3i)|\le|w|+|4-3i|\Leftrightarrow 2\le|w|+5\Leftrightarrow|w|\ge 3$ και

$|w-(4-3i)|\ge\big||w|-|4-3i|\big|\ge|w|-5\Leftrightarrow 2\ge|w|-5\Leftrightarrow|w|\le 7$

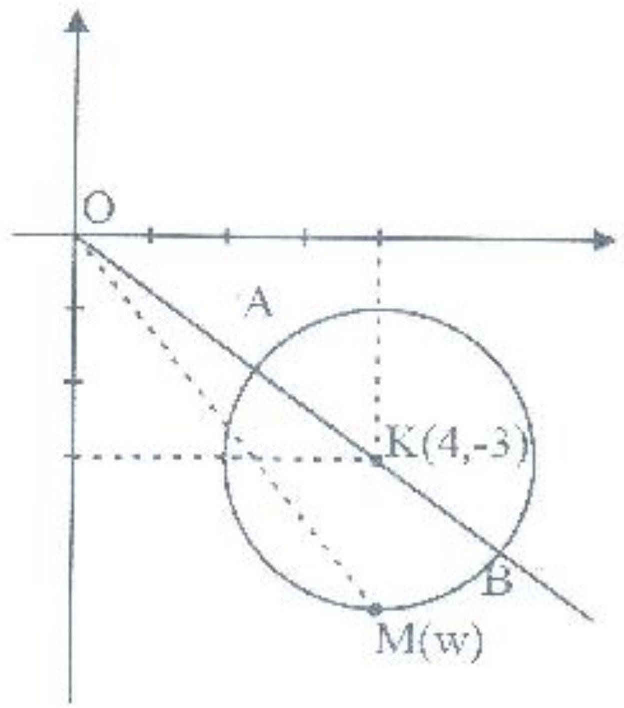
Έτσι $3\le|w|\le 7$.

$2^{ος}$ τρόπος:

Είναι $|w|_{\max} = (OB) = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7$

$|w|_{\min} = (OA) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3$

Άρα $3 \le |w| \le 7$



Ζήτημα 3^o:

A. Έχουμε ότι για κάθε x>0 ισχύει $4\sqrt{x} \le f(x) \le x+4$ (1)

1.Είναι $\lim\limits_{x\to 4}(4\sqrt{x}) = 8$, $\lim\limits_{x\to 4}(x+4) = 8$ και από Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 8$.

2.Από την (1)$\Rightarrow 4\sqrt{x} - 8 \le f(x) - 8 \le x - 4$ (2)

● Αν $x > 4 \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{4\sqrt{x}-8}{x-4} \le \dfrac{f(x)-8}{x-4} \le 1$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{4\sqrt{x}-8}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{4(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{4}{\sqrt{x}+2} = 1$, $\lim\limits_{x\to 4^+} = 1$ από Κ.Π. είναι και

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{f(x)-8}{x-4} = 1$.

● Αν $x < 4 \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{4\sqrt{x}-8}{x-4} \ge \dfrac{f(x)-8}{x-4} \ge 1$ και από Κ.Π. ,όμοια είναι $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f(x)-8}{x-4} = 1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-8}{x-4} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-8}{\sqrt{x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(f(x)-8)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(f(x)-8)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=$

$\lim\limits_{x\to 4}[\dfrac{f(x)-8}{x-4}(\sqrt{x+5}+3)]=1\cdot 6=6$

4.Επειδή $\lim\limits_{x\to 4}(f(x)-5)=8-5=3>0$ είναι και $f(x)-5>0$ κοντά στο 4.

Έτσι: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|f(x)-5|-3}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-5-3}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}[\dfrac{f(x)-8}{(x-4)}\cdot\dfrac{1}{(x-1)}]=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

B. Για την f πρέπει $4x-|z|\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{|z|}{4}$ δηλαδή $\mathrm{A}=[\dfrac{|z|}{4},+\infty)$

1.Αν $x_1,x_2\in$ A με
$x_1<x_2\Rightarrow 4x_1<4x_2\Rightarrow 4x_1-|z|<4x_2-|z|\Rightarrow$
$\sqrt{4x_1-|z|}<\sqrt{4x_2-|z|}\Rightarrow\sqrt{4x_1-|z|}-|z|\le\sqrt{4x_2-|z|}-|z|\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

οπότε η f είναι ↑ στο A. Επομένως και «1-1» άρα αντιστρέφεται.

2.Επειδή η f είναι ↑, τα όποια κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, θα βρίσκονται στη διχοτόμο y=x της $x\mathrm{O}y$.

Από την εξίσωση

$f(x)=x\Leftrightarrow\sqrt{4x-|z|}-|z|=x\Leftrightarrow\sqrt{4x-|z|}=x+|z|\Leftrightarrow\sqrt{4x-|z|}^2=(x+|z|)^2$ (1)

$4x-|z|=x^2+2|z|x+|z|^2\Leftrightarrow x^2+(2|z|-4)x+|z|^2+|z|=0$

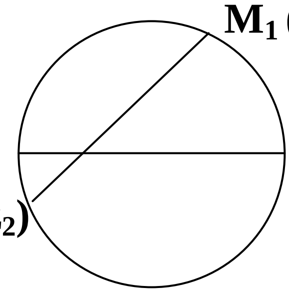
Επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, η (1) πρέπει να έχει μία λύση, άρα πρέπει Δ=0 δηλαδή

$(2|z|-4)^2-4(|z|^2+|z|)=0\Leftrightarrow 4|z|^2-16|z|+16-4|z|^2-4|z|=0\Leftrightarrow 20|z|=16\Leftrightarrow|z|=\dfrac{4}{5}$.

Ο γεωμετρικός τόπος λοιπόν των M(Z) είναι κύκλος κέντρου O(0,0) και $\rho=\dfrac{4}{5}$

3.Είναι $|z_1-z_2|=(M_1M_2)\le 2\dfrac{4}{5}$ άρα $|z_1-z_2|\le\dfrac{8}{5}\Leftrightarrow 5|z_1-z_2|\le 8$.

M_1 (z_1)



M_2 (z_2)

Ζήτημα 4ο:

1.Η $f(x)=x^3+x+2$ έχει $A=\mathbb{R}$ και αν $x_1,x_2\in A$ με

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3, x_1<x_2 \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^3+x_1<x_2^3+x_2 \Rightarrow x_1^3+x_1+2<x_2^3+x_2+2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι ↑ στο A.

2.Είναι f(1)=4 άρα $f^{-1}(4)=1$.

3.Είναι ● $f(x)=12 \Leftrightarrow f(x)=f(2) \overset{f\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} x=2$

● $f^{-1}(x)=-2 \Leftrightarrow x=f(-2) \Leftrightarrow x=-8$

4.●Αν $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow x=f(0) \Leftrightarrow x=2$. Άρα η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον x'x στο σημείο K(2,0).

● Αν x=0 τότε $f^{-1}(0)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3+\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$, προφανής και λόγω της μονοτονίας, μοναδική ρίζα. Άρα $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον y'y στο Λ(0,-1).

●Επειδή η f είναι γν. αύξουσα τα όποια κοινά σημεία βρίσκονται στη διχοτόμο χ=ψ. Απ΄ την εξίσωση

$f(x)=x \Leftrightarrow x^3+x+2=x \Leftrightarrow x^3=-2$. Άρα $x=-\sqrt[3]{2}$.

5.Είναι:

$(2-\eta\mu^2x)^3=\eta\mu^3x+\eta\mu^2x+\eta\mu x-2 \Leftrightarrow (2-\eta\mu^2x)^3-(2-\eta\mu^2x)=\eta\mu^3x+\eta\mu x \Leftrightarrow$

$(2-\eta\mu^2x)^3-(2-\eta\mu^2x)+2=\eta\mu^3x+\eta\mu x+2 \Leftrightarrow f(2-\eta\mu^2x)=f(\eta\mu x) \overset{f\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$

$2-\eta\mu^2x=\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu^2x+\eta\mu x-2=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=1$ ή ημx=-2 απορρίπτεται, άρα x=2κπ+$\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$

6.Είναι $f^{-1}(x)<3 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x))<f(3) \Leftrightarrow x<32$