ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

136

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Συναρτήσεις-Στατιστική **Γεν. Παιδείας**

13-01-13

<u>Θέμα 1ο :</u>

A. i. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου . **(7 μον.)**

ii. Να μελετήσετε την $f(x)=|x|$ ως προς την παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$. **(5 μον.)**

B. Έστω $x_1, x_2, ...x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν.

i. Αν $w_1, w_2, ...w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) , να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X . **(3 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1, 2, ...\kappa, \kappa \le \nu$. **(2,5 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σ**ωστό ή **(Λ) Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις:

i.Η διάμεσος συμπίπτει πάντα με την τιμή μιας παρατήρησης του δείγματος. **Σ Λ**

ii. Στην κανονική κατανομή το 99,7% των παρατηρήσεων , βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$. **Σ Λ**

iii. $\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

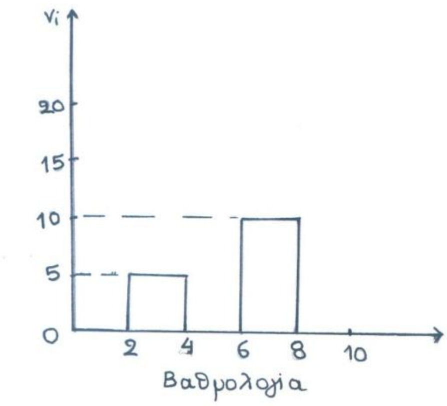
iv. $(\eta\mu x^2)' = 2\sigma\upsilon\nu x$. **Σ Λ**

v. $CV = \frac{s}{-\bar{x}}$ αν $\bar{x} < 0$. **Σ Λ**

(5x1,5μον=7,5μον.)

Θέμα 2ο:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων που παρουσιάζει τη βαθμολογία μιας ομάδας 50 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής .Τα ορθογώνια των κλάσεων $4,6$ και $8,10$ χάθηκαν . Αν γνωρίζετε ότι η βαθμολογία κυμαίνεται από 2 έως 10 και $\nu_4 - \nu_2 = 5$:



i. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων . **(8 μον.)**

ii. Αν ν_2=15 και ν_4=20 , να βρείτε τη διάμεσο . **(7 μον.)**

iii. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των φοιτητών. (Δίνεται : $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 vi - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} xivi\right)^2}{\nu}\right\}$

(10 μον.)

Θέμα 3ο:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε το α , ώστε η ευθεία $\varepsilon : y = -x + 2$, να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f . **(7 μον.)**

Β. Έστω $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_\nu \;\; x_\nu, y_\nu$ ν τυχαία σημεία της ευθείας ε του Α ερωτήματος .Αν οι τετμημένες τους έχουν μέση τιμή 10 και την τυπική απόκλιση 2 , να βρείτε :

i. Τη μέση τιμή $\bar{y}$ και την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών .

ii. Είναι το δείγμα των τεταγμένων ομοιογενές ;

iii. Αν γνωρίζετε ότι $\sum_{i=1}^{\nu} \;\; y_i + 8 \;\; ^2 = 40$, να βρείτε το μέγεθος ν του δείγματος . **(3x6=18 μον.)**

Θέμα 4^ο^:

Α. Η κατανομή συχνοτήτων πλαστικών ράβδων που παράγει μια μηχανή ως προς το μήκος τους είναι περίπου κανονική .Το 68% των ράβδων έχουν μήκος από 8cm έως 12cm .

i. Να βρείτε τη μέση τιμή , τη διάμεσο , την τυπική απόκλιση και το εύρος του μήκους των ράβδων . **(4 μον.)**

ii. Το ποσοστό των ράβδων που έχουν μήκος το πολύ 6 cm. **(3 μον.)**

iii. Μία ράβδος θεωρείται ελαττωματική , όταν έχει μήκος μεγαλύτερο από 16cm ή μικρότερο από 4cm .Αν η μηχανή παράγει 2000 ράβδους και οι 13 είναι ελαττωματικές , να εξετάσετε αν η μηχανή έχει βλάβη . **(4 μον.)**

Β. i . Η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων 6 , β , 3 , γ , 9 , α ,7 με α<β<γ και $\beta,\gamma\in\mathbb{N}$ είναι 3 και 8 αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι α=1 , β=2 και γ=3. **(5 μον.)**

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+2}{e^{\beta x}}$. **(6 μον.)**

iii. Να δείξετε ότι $2f(x)+f'(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)</u>

<u>Θέμα1^{ο}:</u>

Α. i. ● Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο .

● Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta), f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο x_0,β , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο .

ii. Έχουμε $f(x)=|x|=\begin{matrix} x, x\ge 0 \\ -x, x<0 \end{matrix}$

Τότε $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$

● Αν h>0 τότε $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$

● Αν h<0 τότε $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h}=-1$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ που σημαίνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Β. i. Ο σταθμικός μέσος ορίζεται ως εξής :

$$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+....+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+....+w_\nu}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu}w_i}$$

ii. Εφόσον $0\le \nu_i\le \nu \Leftrightarrow 0\le \dfrac{\nu_i}{\nu}\le \dfrac{\nu}{\nu}\Leftrightarrow 0\le f_i\le 1$ για $i=1,2,...,\kappa$

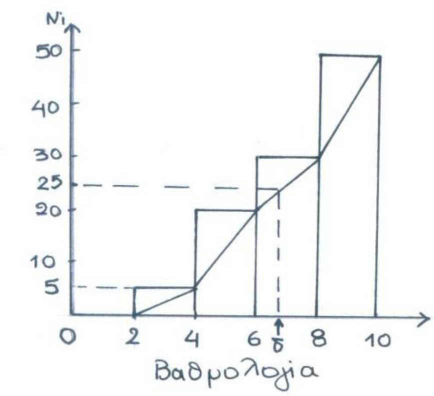
Γ. i.Λ **ii.**Σ **iii.**Λ **iv.Λ** **v.**Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Είναι $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=50 \Leftrightarrow 5+\nu_4-5+10+\nu_4=50 \Leftrightarrow$
$2\nu_4=40 \Leftrightarrow \nu_4=20$ και επομένως $\nu_4-\nu_2=5 \Leftrightarrow \nu_2=\nu_4-5 \Leftrightarrow \nu_2=15$.
Θα κατασκευάσουμε πίνακα κατανομής συχνοτήτων τον οποίο θα χρειαστούμε για τα ερωτήματα Α ,Β ,Γ .

,	ν_i	x_i	N_i	$x_i\nu_i$	$x_i^2\nu_i$
2,4	5	3	5	15	45
4,6	15	5	20	75	375
6,8	10	7	30	70	490
8,10	20	9	50	180	1620
Σύνολο	50	-	-	340	2530

Α.



Β. Για τη διάμεσο θέλουμε το 50% των παρατηρήσεων άρα ν=25.
Όπως φαίνεται και από το παραπάνω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι : $\delta=6+\dfrac{25-20}{30-20}\cdot\ 8-6\ =6+\dfrac{5}{10}\cdot 2=6+1=7$

Γ. Η μέση τιμή είναι : $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{340}{50}=6,8$

Η διακύμανση είναι :

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{4}x_i^2\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}=\frac{2530}{50}-(6,8)^2=50,6-46,24=4,36$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4,36}$

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Έχουμε $f'(x)=(x^2+\alpha x+6)'=2x+\alpha$

Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y=-x+2$ στη C_f πρέπει να υπάρχει σημείο $M(x_0,f(x_0))$ ώστε :

$f(x_0)=-x_0+2$ και $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon$

Είναι : ● $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow 2x_0+\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-2x_0-1$ (1)

● $f(x_0)=-x_0+2 \Leftrightarrow x_0^2+\alpha x_0+6=-x_0+2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$x_0^2+\;-2x_0-1\;\,x_0+6=-x_0+2 \Leftrightarrow$

$x_0^2-2x_0^2-x_0+6=-x_0+2 \Leftrightarrow$

$x_0^2=4 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$

Για $x_0=2$, έχουμε από την (1) $\alpha=-2\cdot 2-1=-5$

Για x=-2 , έχουμε από την (1) $\alpha=-2\cdot(-2)-1=3$

Άρα α=-5 ή α=3.

Β. Είναι $\bar{x}=10$ και $s_x=2$

i . Οι τεταγμένες των σημείων αυτών έχουν την μορφή $y_i=-x_i+2$

Τότε $\bar{y}=-\bar{x}+2$=-10+2=-8 και

$s_y=\left|(-1)s_x\right|=2$

ii. Για να βρούμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές θα βρούμε το συντελεστή μεταβλητότητας . Είναι :

$$CV=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{2}{|-8|}=\frac{1}{4}=0,25=25\%>10\%$$

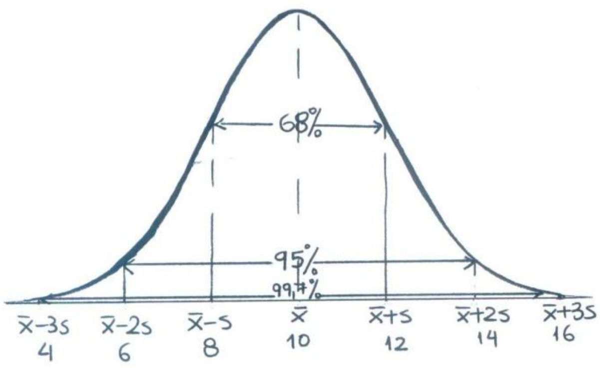
εφόσον $CV>10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

iii. Έχουμε $s_y^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} \; y_i-\bar{y} \;^2}{\nu} \Leftrightarrow 2^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} \; y_i+8 \;^2}{\nu} \Leftrightarrow$

$4\nu=40 \Leftrightarrow \nu=10$.

Θέμα 4ο:

Α. i . Εφόσον οι πλαστικές ράβδοι ακολουθούν την κανονική κατανομή έχουμε :



Γνωρίζουμε ότι s=2 και ότι το 68% των ράβδων έχουν μήκος από 8cm έως 12 cm. Άρα:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}-s=8\\ \bar{x}+s=12\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}2\bar{x}=20\\ \bar{x}-5=8\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\bar{x}=10\\ s=2\end{array}$$

Επίσης $\delta=\bar{x}$ άρα $\boxed{\delta=10}$ και $R\simeq 6s$ άρα $\boxed{R=12}$

ii. Το ποσοστό των ράβδων που έχουν μήκος το πολύ 6 είναι :

$$\frac{100\%-95\%}{2}=\frac{5\%}{2}=2,5\%.$$

iii. Το ποσοστό των ράβδων που έχει μήκος μεγαλύτερο από 16cm ή μικρότερο από 4cm είναι : 100%-99,7%=0,3%.

Αν η μηχανή παράγει 2000 οι ελαττωματικές πρέπει να είναι

$\frac{0,3}{100}\cdot 2000$=6 ράβδοι .

Όμως οι ελαττωματικές είναι 13 , άρα η μηχανή έχει βλάβη.

Β.i. Έχουμε τις παρατηρήσεις 6 ,β , 3, γ ,α, 7

εφόσον η διάμεσος είναι 3 έπεται ότι το 50% το πολύ των παρατηρήσεων θα βρίσκονται μετά το 3 και το 50% το πολύ των παρατηρήσεων θα βρίσκονται πριν το 3 .Γνωρίζουμε επίσης ότι α<β<γ , επομένως αν βάλουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά , θα είναι α , β , γ , 3 , 6 , 7 , 9.

Τότε $R=8\Leftrightarrow 9-\alpha=8\Leftrightarrow$ $\boxed{\alpha=1}$

Επίσης $\beta,\gamma\in\mathbb{N}$ με α<β<γ άρα $\boxed{\beta=2}$ και $\boxed{\gamma=3}$

ii. Είναι $f(x)=\dfrac{\alpha x+2}{e^{\beta x}}=\dfrac{x+2}{e^{2x}}, \quad A_f=\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f είναι : $f'(x)=\left(\dfrac{x+2}{e^{2x}}\right)'=$

$$=\frac{(x+2)'e^{2x}-(x+2)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2}=\frac{e^{2x}-2(x+2)e^{2x}}{e^{4x}}=$$

$$=\frac{e^{2x}\ 1-2(x+2)}{e^{4x}}=\frac{1-2x-4}{e^{2x}}=\frac{-2x-3}{e^{2x}}\ .$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου : $f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{-2x-3}{e^{2x}}=0 \Leftrightarrow -2x-3=0 \Leftrightarrow -2x=3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\ .$$

Ο πίνακας προσήμων της f′ είναι :

x	-∞	$-\frac{3}{2}$	+∞
f '	+	-	
f	↗	↘	

Τ.Μ.

Η μονοτονία της f είναι : γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$

γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=-\dfrac{3}{2}$ το

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{-\frac{3}{2}+2}{e^{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)}}=\frac{\frac{1}{2}}{e^{-3}}=\frac{e^{3}}{2}$$

iii. Έχουμε : $2f(x)+f'(x)=2\left(\dfrac{x+2}{e^{2x}}\right)+\left(\dfrac{-2x-3}{e^{2x}}\right)=$

$$=\frac{2x+4-2x-3}{e^{2x}}=\frac{1}{e^{2x}}$$