

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

135

Υλη: Παράγωγοι-Ολοκληρώματα

Ον/μο:.....

Θετ-Τεχν. Κατ

Γ' Λυκείου

15-3-15

ΘΕΜΑ Α

A1. Δώστε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος . (μον.5)

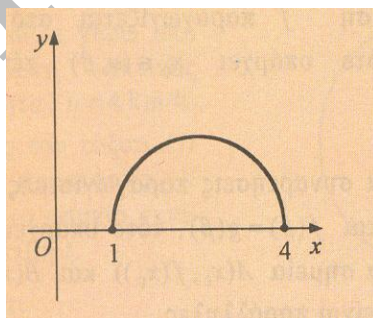
A2. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ . (μον.8)

A3.α. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 αν και μόνο αν $f'(x_0)=0$ Σ Λ

β. Η συνάρτηση $F(x) = x \ln x - x$ είναι μια παράγουσα της $f(x) = \ln x$, με $x > 0$. Σ Λ

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. Σ Λ

δ. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα τότε :



i) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$ Σ Λ

ii) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$ Σ Λ

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,4)$ Σ Λ

iv) υπάρχει $x_0 \in (1,4) : f'(x_0) = 0$ Σ Λ

(μον.7)

ε.

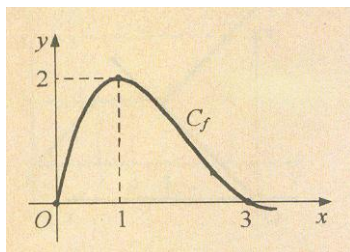
1. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του παρακάτω σχήματος. Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με:

A) 0

B) 1

Γ) 2

Δ) $\frac{1}{2}$



(μον.3)

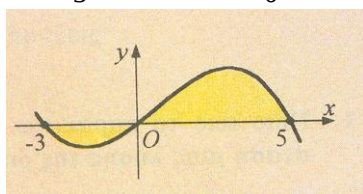
2. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος είναι ίσο με :

A) $\int_{-3}^5 f(x)dx$

B) $\int_5^{-3} f(x)dx$

Γ) $\int_{-3}^0 f(x)dx - \int_0^5 f(x)dx$

Δ) $-\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx$



(μον.3)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, το σύνολο στο οποίο παραγωγίζεται, να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε, αν έχει, τα ακρότατα.

(μον.10)

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(μον.7)

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\sqrt{x} + x - 3 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα την οποία και να βρείτε.

(μον.8)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$2 + \int_1^x f(t)dt = 2x \cdot f(x) \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (μον.5)

Γ2. Ισχύει $f(x) + 2xf'(x) = 0$ για κάθε $x > 0$ (μον.5)

Γ3. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \sqrt{x}$ είναι σταθερή (μον.8)

Γ4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ (μον.7)

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \sin x & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ \sqrt{1 + 2\eta\mu x} \cdot \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνέχεια της f . (μον.3)

β) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες. (μον.3)

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (μον.7)

Δ2. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ και τη

$$\text{συνάρτηση } h \text{ με τύπο } h(x) = \int_{x+4}^{x^2-2x} f(t)dt - x^2 + 3x + 4, x \in \mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την h' . (μον.4)

2. Έστω ότι για την h ισχύει $h(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $f(3)$. (μον.5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (3, 8)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$. (μον.3)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΘΕΜΑ Α

A1, A2 Θεωρία, σχολικό βιβλίο

A3. α. Λ β. Σ γ. Σ

δ. i→Λ, ii→Λ, iii→Λ iv→Σ,

ε. 1→Γ, 2→Δ

ΘΕΜΑ Β

α. • Η f έχει π.ο το $A=[0, +\infty)$.

• Παραγωγίζεται στο $A'=(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} + x - 3 + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} + x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right) = +\infty. \end{aligned}$$

• Η f έχει $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 > 0, \quad \forall x \in A$

άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

• Έχει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=-3$.

β. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0, +\infty)$

$$\text{έχει σύνολο τιμών το } f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty).$$

γ. Η εξίσωση $2\sqrt{x} + x - 3 = 0$ γράφεται $f(x)=0$. Η f έχει μοναδική ρίζα γιατί στο σύνολο τιμών της περιέχεται το 0 και είναι γνησίως αύξουσα. Άρα και η εξίσωση $2\sqrt{x} + x - 3 = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

ΘΕΜΑ Γ

α. Η ισότητα $2 + \int_1^x f(t)dt = 2x \cdot f(x)$, $x > 0$ δίνει

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\int_1^x f(t)dt}{x} . \text{Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } (0, +\infty) \text{ και το}$$

$1 \in (0, +\infty)$, η $\int_1^x f(t)dt$ παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων .

β. Παραγωγίζω την ισότητα $2 + \int_1^x f(t)dt = 2xf(x)$ και παίρνω

$$f(x) = 2f(x) + 2xf'(x) \Rightarrow f(x) + 2xf'(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma. \text{Είναι } , \forall x > 0, \quad g'(x) &= (f(x) \cdot \sqrt{x})' = f'(x)\sqrt{x} + f(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{2xf'(x) + f(x)}{2\sqrt{x}} \stackrel{(\beta)}{=} \frac{0}{2\sqrt{x}} = 0 , \text{ άρα } g(x) = c \quad (1) \end{aligned}$$

$$\delta. \text{Από την } g(x) = f(x)\sqrt{x} \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

Η (1) για $x=1$ δίνει $g(1) = c$

Η $g(x) = f(x)\sqrt{x}$ για $x=1$ δίνει $g(1) = f(1)$

Η αρχική ισότητα για $x=1$ δίνει $2 = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 1$

Άρα $g(1)=1$ και η (2) δίνει $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

ΘΕΜΑ Δ

Α. α) Η f είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ ως γινόμενο συνεχών, συνεχής

στο $(0, \frac{\pi}{2}]$ ως σύνθεση συνεχών. Ακόμη :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \sin x) = e^0 \cdot \sin 0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{1 + 2\eta\mu x \cdot \sin x}) = \sqrt{1 + \eta\mu 0 \cdot \sin 0} = 1 \text{ και}$$

$$f(0) = \sqrt{1 + 2\eta\mu 0} = 1$$

Η f λοιπόν είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

β) Αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επειδή δεν υπάρχει περιοχή του $+\infty$ ή $-\infty$ στο π.ο δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx =$

$$= \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \cdot \sin x \cdot dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 2\eta\mu x \cdot \sin x} \, dx}_{I_2}.$$

$$\text{Είναι : } I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \sin x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (e^x)' \sin x dx = \left[e^x \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \cdot \eta\mu x dx =$$

$$= e^0 \cdot \sin 0 - e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (e^x)' \cdot \eta\mu x dx = 1 + \left[e^x \cdot \eta\mu x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^x \cdot \sin x dx$$

$$\text{άρα } 2I_1 = 1 + \left(e^0 \eta\mu 0 - e^{-\frac{\pi}{2}} \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow 2I_1 = 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I_1 = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(-\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + \eta\mu \frac{\pi}{2} \right) - (-\sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu 0) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } E = I_1 + I_2 \Rightarrow E = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} + 2$$

B. 1. Η h γράφεται : $h(x) = \int_{x+4}^{\alpha} f(t) dt + \int_{\alpha}^{x^2-2x} f(t) dt - x^2 + 3x + 4 \Rightarrow$

$$h(x) = -\int_{\alpha}^{x+4} f(t) dt + \int_{\alpha}^{x^2-2x} f(t) dt - x^2 + 3x + 4 \quad (1)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $\alpha \in \mathbb{R}$

οπότε οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{x+4} f(t) dt$, $\int_{\alpha}^{x^2-2x} f(t) dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση της $\int_{\alpha}^x f(t) dt$ και $x+4$,

$x^2 - 2x$ αντίστοιχα. Η h λοιπόν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων. Η παράγωγός της είναι :

$$h'(x) = -f(x+4) \cdot (x+4)' + f(x^2-2x)(x^2-2x)' - 2x + 3 \text{ δηλ.}$$

$$h'(x) = (2x-2) \cdot f(x^2-2x) - f(x+4) - 2x + 3 \quad (2)$$

2. α) Αφού $h(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η h έχει ελάχιστο το 0
και παρατηρώ ότι αυτό συμβαίνει για $x=-1$, ή $x=4$
αφού $h(-1)=0$ και $h(4)=0$. Σύμφωνα με το Θ. Fermat λοιπόν
θα είναι $h'(-1) = 0 \Rightarrow -4 \cdot f(3) - f(3) + 5 = 0 \Rightarrow f(3)=1$

β) όπως στο α) θα είναι $h'(4) = 0 \Rightarrow 6 \cdot f(8) - f(8) - 5 = 0 \Rightarrow f(8) = 1$
 $\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } [3,8] \\ \text{η } f \text{ είναι παραγωγ. στο } (3,8) \\ f(3) = f(8) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Θ. Rolle} \\ \Rightarrow \exists \text{ τουλάχισ. ένας } \xi \in (3,8) : f'(\xi) = 0 \end{array}$