ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

135

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Συναρτήσεις-Στατιστική **Γεν. Παιδείας**

11-11-12

Θέμα 1^o :

Α. i. Να διατυπώσετε το κριτήριο μονοτονίας . **(5 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι $f'(x)=0$. **(3 μον.)**

Β. Έστω $x_1, x_2, ...x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν , όπου κ,ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \le \nu$.

i. Τι εκφράζουν οι αθροιστικές συχνότητες ; **(2 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι $f_1+f_2+...+f_\kappa=1$ **.** **(2 μον.)**

iii. Ποιες είναι οι γραφικές παραστάσεις με τις οποίες παρουσιάζονται στατιστικά δεδομένα ;(αναφορικά) **(3 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Η σχετική συχνότητα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές . **Σ Λ**

ii.Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε ποιοτικές και διακριτές . **Σ Λ**

iii.Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο . **Σ Λ**

iv. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$. **Σ Λ**

v. $(\ln e^x)'=1$. **Σ Λ**

(5x2μον=10μον.)

Θέμα 2ο:

Στην τρίτη τάξη ενός Λυκείου των Τρικάλων οι 50 μαθητές έγραψαν στις Πανελλήνιες εξετάσεις στο μάθημα Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής , ως εξής :

- Όλοι οι μαθητές έγραψαν 15 ή 16 ή 17 ή 18 ή 19 ή 20
- Οι 45 μαθητές έγραψαν το πολύ 19
- Το 28% των μαθητών έγραψαν 19 ή 20
- Οι 30 μαθητές έγραψαν το πολύ 17
- Οι μαθητές που έγραψαν 16 είναι πενταπλάσιοι των μαθητών που έγραψαν 15
- Οι 27 μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 17 αλλά το πολύ 19

i. Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων ($v_i, f_i, f_i\%, F_i, F_i\%, N_i$) . **(10 μον.)**

ii. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων. **(8 μον.)**

iii. Να κατασκευάσετε διάγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων . **(7 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)e^{2x}$

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα . **(10 μον.)**

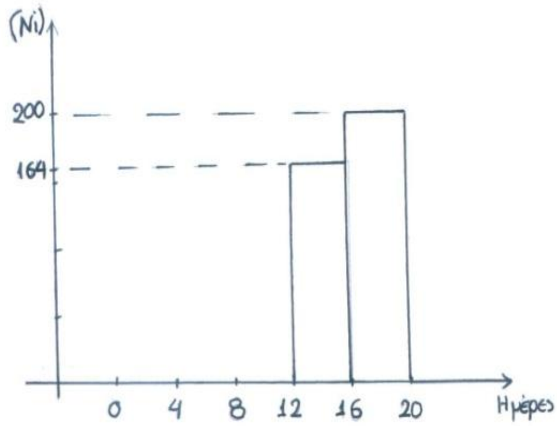
ii. Να αποδείξετε ότι **:** $2(x-2)\cdot e^{2x-3}+1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(5 μον.)**

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-2x}, x>0$ **.**Να βρείτε το σημείο της καμπύλης της f , από το οποίο αν φέρουμε παράλληλες προς τους άξονες , το σχηματιζόμενο ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν . **(10 μον.)**

Θέμα 4ο:

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι ημέρες μιας εκπαιδευτικής φοιτητικής εκδρομής στο εξωτερικό .Δίνεται επίσης το ιστόγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων , από το οποίο έχουν χαθεί κάποια δεδομένα .Αν γνωρίζουμε ότι :

– Ημέρες	v_i
0,4	v_1
4,8	v_2
8,12	v_3
12,16	v_4
16,20	v_5
Σύνολο	v



- $v_1 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{32(x^2 - x)}{x-1}$
- Το N_2 ισούται με το ελάχιστο της συνάρτησης: $f(x) = 2x^2 - 4x + 70$
- Το v_3 είναι ο ρυθμός μεταβολής της $g(x) = (x-2)^{2013} + 44x$ για x=2

Τότε :

Α. Να βρεθούν τα $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v$ **(5 μον.)**

Β. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων , απόλυτων , σχετικών και αθροιστικών . **(5 μον.)**

Γ. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων . **(6 μον.)**

Δ. Να βρείτε :

i. Το πλήθος των φοιτητών που πήγαν εκδρομή κάτω από 12 ημέρες .

ii. Το ποσοστό των φοιτητών που πήγαν εκδρομή τουλάχιστον 8 ημέρες .

iii. Το πλήθος των φοιτητών που πήγαν εκδρομή το πολύ 11 ημέρες . **(3x3=9 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα1ο:

Α. i. ● Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

● Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

ii. Είναι $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h}=0$

Άρα $f'(x)=0$.

Β. i. Οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

ii. Είναι $f_1+f_2+....+f_\kappa=\dfrac{v_1}{v}+\dfrac{v_2}{v}+.....+\dfrac{v_\kappa}{v}=$

$=\dfrac{v_1+v_2+....+v_\kappa}{v}=\dfrac{v}{v}=1$

iii. Οι γραφικές παραστάσεις με τις οποίες παρουσιάζουμε στατιστικά δεδομένα είναι : ραβδόγραμμα , διάγραμμα συχνοτήτων , κυκλικό διάγραμμα , σημειόγραμμα , χρονόγραμμα και ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Γ. i Λ , **ii** Λ , **iii** Σ , **iv.** Λ , **v.** Σ

Θέμα 2ο:

i.

x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
15	3	3	0,06	6	0,06	6
16	15	18	0,3	30	0,36	36
17	12	30	0,24	24	0,6	60
18	6	36	0,12	12	0,72	72
19	9	45	0,18	18	0,9	90
20	5	50	0,1	10	1	100
Σύνολο	50	-	1	100	-	-

- 50 μαθητές έγραψαν 15 ή 16 ή 17 ή 18 ή 19 ή 20 άρα ν=50
- 45 μαθητές έγραψαν το πολύ 19(δηλ 15 ή 16 ή 17 ή 18 ή 19)
  άρα $\boxed{v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=45}$ (1)

  άρα $v_6=v-45=50-45=5$
- Το 28% των μαθητών , δηλαδή $\frac{28}{100}\cdot 50=14$ μαθητές
  έγραψαν 19 ή 20 άρα $v_5+v_6=14 \Leftrightarrow v_5=14-5 \Leftrightarrow v_5=9$
- 30 μαθητές έγραψαν το πολύ 17 (δηλ 15 ή 16 ή 17)
  άρα $\boxed{v_1+v_2+v_3=30}$ (2)
- Οι μαθητές που έγραψαν 16 είναι πενταπλάσιο των μαθητών
  που έγραψαν 15 , άρα $\boxed{v_2=5v_1}$ (3)
- 27 μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 17 αλλά το πολύ 19(δηλ 17 ή 18
  ή 19) άρα $\boxed{v_3+v_4+v_5=27}$ (4)

Η (1) $\overset{(3)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=45 \Leftrightarrow v_1+5v_1+27=45 \Leftrightarrow$

$6v_1=18 \Leftrightarrow v_1=3$

Άρα $v_2=5\cdot 3=15$

Όμως η (2) $\Rightarrow v_1+v_2+v_3=30 \Leftrightarrow v_3=30-18 \Leftrightarrow v_3=12$

άρα $v_4=50-(3+15+12+9+5)=6$

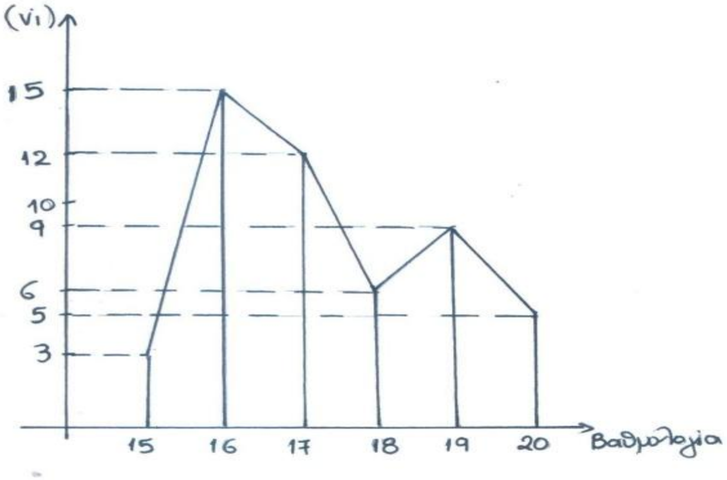
Οπότε για τις σχετικές συχνότητες έχουμε : $f_i=\frac{v_i}{v}, \quad f_i\%=f_i\cdot 100$

και για τις αθροιστικές : $N_1=v_1, \quad N_2=N_1+v_2,....$

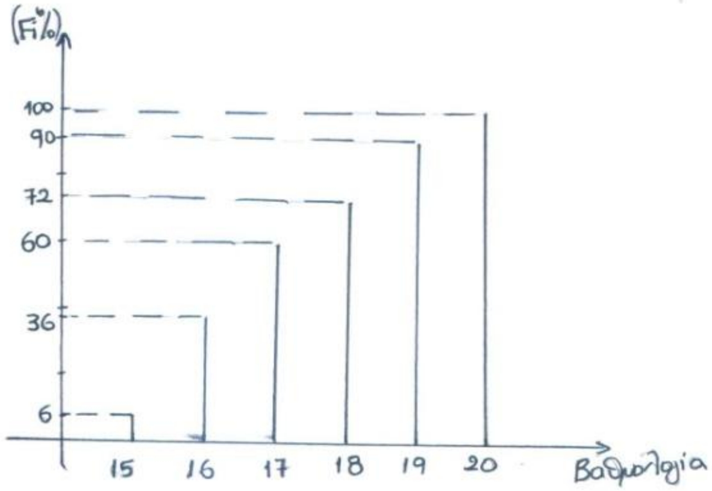
$F_1=f_1, \quad F_2=F_1+f_2,....$

$F_i\%=F_i\cdot 100$

ii.



iii.



<u>Θέμα 3ο:</u>

A. $f(x)=(x-2)e^{2x}$, $A_f=\mathbb{R}$

i. ● Βρίσκουμε την παράγωγο της f .

$$f'(x)=(x-2)'e^{2x}+(x-2)(e^{2x})'=e^{2x}+(x-2)e^{2x}\cdot(2x)'=$$

$$=e^{2x}+2(x-2)e^{2x}=e^{2x}(1+2x-4)=e^{2x}(2x-3)$$

● Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{2x}(2x-3)=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow 2x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

● Ο πίνακας προσήμων της f΄ είναι :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
e^{2x}	+		+
2x-3	−	0	+
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘	Ο.Ε.	↗

Η μονοτονία της f είναι : γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{3}{2}$ το

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}-2\right)\cdot e^{2-\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{2}\right)\cdot e^{3}=-\frac{e^{3}}{2}$$

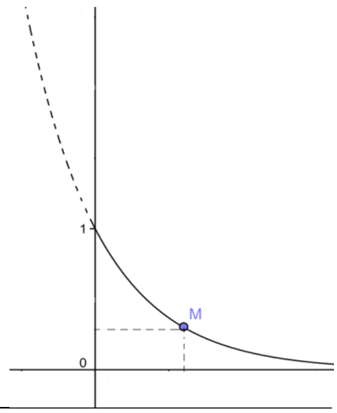
ii. Εφόσον η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{3}{2}$ το

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{e^{3}}{2}$ θα είναι $f(x)\geq-\frac{e^{3}}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή ,

$$x-2\ \cdot e^{2x}\geq-\frac{e^{3}}{2}\Leftrightarrow 2(x-2)e^{2x}\geq-e^{3}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2(x-2)e^{2x}}{e^{3}}\geq-1\Leftrightarrow 2(x-2)e^{2x-3}+1\geq0$$

Β. Έστω η $f(x)=e^{-2x},\quad x>0$ και $M(x,f(x))$ ένα σημείο αυτής. Το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι $E(x)=\left|x\cdot e^{-2x}\right|\overset{x>0}{=}x\cdot e^{-2x},\quad x>0$



- $E'(x) = \left(x \cdot e^{-2x}\right)' = (x)' \cdot e^{-2x} + x\left(e^{-2x}\right)' =$

  $= e^{-2x} - 2xe^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$
- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x}(1-2x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- Ο πίνακας προσήμων της E΄ είναι :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
e^{-2x}		+		+	
1-2x		+	0	−	
E'(x)		+	0	−	
E(x)		↗	Ο.Μ.	↘	

Άρα η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{1}{2}$. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι $M\left(\frac{1}{2}, e^{-2\cdot\frac{1}{2}}\right)$ δηλ . $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$.

<u>Θέμα 4^{o}:</u>

Α. ● ν=200 από το ραβδόγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων .

- $v_1 = \lim\limits_{x\to 1} \frac{32(x^2 - x)}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{32x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} 32x = 32$
- $f(x) = 2x^2 - 4x + 70, \quad A_f = \mathbb{R}$

  $f'(x) = (2x^2 - 4x + 70)' = 4x - 4$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

  Ο πίνακας προσήμων της f΄ είναι :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)		↘	Ο.Ε.	↗	

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το
$f(1)=2-4+70=68$

Άρα $N_2=68$, οπότε $v_2=N_2-v_1=68-32=36$

- $g(x)=(x-2)^{2013}+44x$

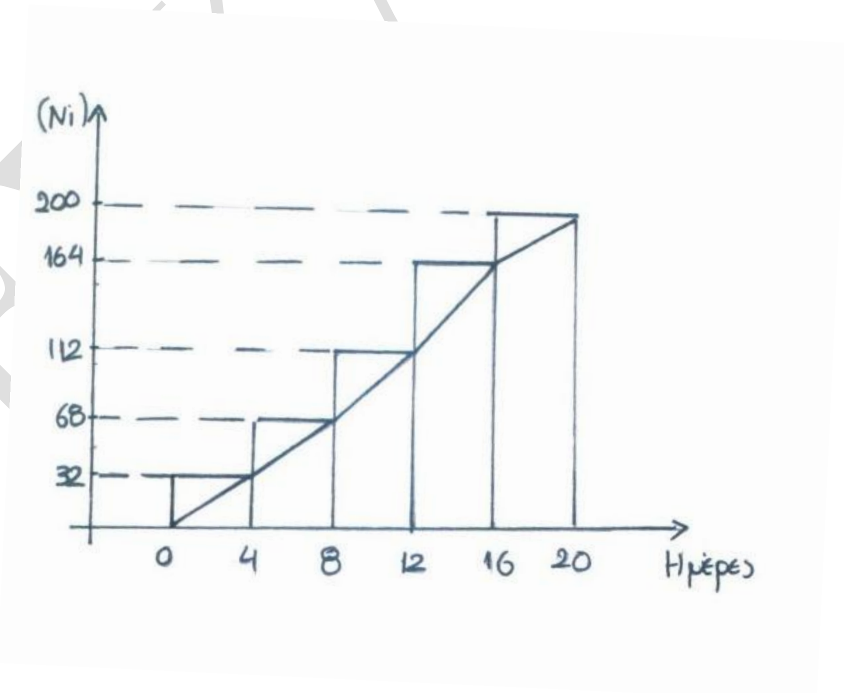
Ο ρυθμός μεταβολής της g είναι $g'(x)=2013(x-2)^{2012}+44$
Άρα $v_3=g'(2)=44$

- $N_4=164$ άρα $v_5=N_5-N_4=200-164=36$
- $v_4=200-(32+36+44+36)=52$

Β.

Ημέρες	x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
0,4	2	32	32	0,16	16	0,16	16
4,8	6	36	68	0,18	18	0,34	34
8,12	10	44	112	0,22	22	0,56	56
12,16	14	52	164	0,26	26	0,82	82
16,20	18	36	200	0,18	18	1	100
Σύνολο	-	200	-	1	100	-	-

Γ.



Δ. **i.** Κάτω από 12 ημέρες πήγαν οι : $N_3=112$ φοιτητές .

ii. Τουλάχιστον 8 ημέρες (δηλ. από 8 και πάνω) πήγε εκδρομή το $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 22 + 26 + 18 = 66\%$

iii. Για το πλήθος των φοιτητών που πήγαν εκδρομή το πολύ 11 ημέρες , θέλουμε όλη τη πρώτη και όλη τη δεύτερη κλάση που είναι και μέχρι και 8 ημέρες κι άλλες 3 ημέρες από την τρίτη κλάση .Άρα :

$$v_1 + v_2 + \frac{3}{4}v_3 = 32 + 36 + \frac{3}{4}\cdot 44 = 101 \text{ φοιτητές .}$$