ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

134

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **Γεν. Παιδείας**

09-09-12

Θέμα 1ο :

Α. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής ;

(5 μον.)

Β. Έστω η συνάρτηση $F(x)=c\cdot f(x)$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη , να αποδείξετε ότι : $F'(x)=c\cdot f'(x)$ **(10 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν οι συναρτήσεις f ,g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο A . **Σ Λ**

ii. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο πραγματικό αριθμό , τότε ισχύει : $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$ **Σ Λ**

iii. $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ **Σ Λ**

iv. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **Σ Λ**

v. Έστω οι διακεκριμένες ευθείες (δηλαδή δεν συμπίπτουν) $\varepsilon_1: y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\alpha_2 x+\beta_2$.Τότε αν $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2$ **Σ Λ**

(5x2μον=10μον.)

Θέμα 2ο:

Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=7 cm και ΒΓ=5cm .

Αν $A\hat{B}\Gamma=\theta$, να εκφράσετε ως συνάρτηση του θ :

i . την απόσταση των ΑΒ και ΓΔ. **(8 μον.)**

ii. το εμβάδον του ΑΒΓΔ . **(8 μον.)**

iii. Αν η παραπάνω απόσταση δίνεται από τη συνάρτηση α(θ)=5ημθ και το εμβαδόν από τη συνάρτηση Ε(θ)=35ημθ να βρείτε τις παραγώγους αυτών . **(9 μον.)**

Θέμα 3°:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{4x-3}}{x-1}, & \alpha\nu\ x>1 \\ 3\alpha-2, & \alpha\nu\ x=1 \end{cases}$

Να βρείτε το α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ **(10 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{e^x}$

i. Να αποδείξετε ότι $(x-4)f(x)+(x-2)f'(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ **(8 μον.)**

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ **(7 μον.)**

Θέμα 4°:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}$

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$. **(5 μον.)**

ii. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_0,f(x_0))$ είναι η $y=2e^{2x_0}\cdot x+e^{2x_0}(1-2x_0)$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από την αρχή των αξόνων . **(5 μον.)**

Β. Η θέση ενός υλικού σημείου , το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x=x(t)=t(t-2)^2$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε m.

i. Να βρείτε την ταχύτητα και το μέτρο της ταχύτητας σε χρόνο t.

ii. Ποια είναι η επιτάχυνση και το μέτρο της επιτάχυνσης σε χρόνο t=1sec;

iii. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο ;

iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση ;

v. Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει στη διάρκεια των πρώτων 2sec .

(5x3μον=15μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα1ο:

Α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται συνεχής αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

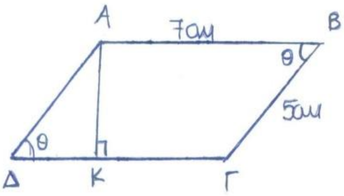
Β. $F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} c\cdot\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\cdot f'(x)$

Γ. **i.** Λ , **ii.** Λ , **iii.** Σ , **iv.** Λ , **v.** Σ

Θέμα 2ο:

i. Εφόσον ΑΒΓΔ παρ/μο είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = \hat{\Theta}$



Φέρουμε $AK \perp \Gamma\Delta$ και στο $\overset{\Delta}{AK\Delta}$ $(\hat{K} = 90^\circ)$

έχουμε: $\eta\mu\theta = \frac{AK}{A\Delta} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{AK}{5} \Rightarrow AK = 5\eta\mu\theta$

με $0 < \theta < \pi$

Άρα η ζητούμενη απόσταση είναι $\alpha(\theta) = 5\eta\mu\theta$, $0 < \theta < \pi$

ii. Το εμβαδό του παρ/μου είναι $E(\theta) = \beta\cdot\upsilon = 7\cdot 5\eta\mu\theta$

δηλ Ε(θ)=35ημθ , $0 < \theta < \pi$

iii. $\alpha'(\theta) = (5\eta\mu\theta)' = 5\sigma\upsilon\nu\theta$

$E'(\theta) = (35\eta\mu\theta)' = 35\sigma\upsilon\nu\theta$

Θέμα 3ο:

Α. Για να είναι η f συνεχής στο x_0=1 πρέπει :

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

www.efklidis.edu.gr
Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

Είναι : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{4x-3}}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(1-\sqrt{4x-3}\right)\left(1+\sqrt{4x-3}\right)}{(x-1)(1+\sqrt{4x-3})}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-(4x-3)}{(x-1)(1+\sqrt{4x-3})}=\lim_{x\to1}\frac{4-4x}{(x-1)(1+\sqrt{4x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-4(x-1)}{(x-1)(1+\sqrt{4x-3})}=\lim_{x\to1}\frac{-4}{1+\sqrt{4x-3}}=\frac{-4}{1+1}=-2$$

άρα πρέπει $3\alpha-2=-2\Leftrightarrow 3\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$

B. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{e^x}=\dfrac{(x-2)^2}{e^x}$

i.Είναι :

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-4x+4}{e^x}\right)'=\frac{\left(x^2-4x+4\right)'e^x-(x^2-4x+4)(e^x)'}{e^{2x}}=$$

$$=\frac{(2x-4)e^x-e^x(x^2-4x+4)}{e^{2x}}=\frac{e^x(2x-4-x^2+4x-4)}{e^{2x}}=$$

$$=\frac{-x^2+6x-8}{e^x}=-\frac{(x^2-6x+8)}{e^x}=-\frac{(x-4)(x-2)}{e^x}$$

Τότε: $(x-4)f(x)+(x-2)f'(x)=$

$$=(x-4)\frac{(x-2)^2}{e^x}+(x-2)\cdot\left[-\frac{(x-4)(x-2)}{e^x}\right]$$

$$=\frac{(x-4)(x-2)^2}{e^x}-\frac{(x-4)(x-2)^2}{e^x}=0,x\in\mathbb{R}$$

ii. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\dfrac{(x-2)^2}{e^x}}{\dfrac{-(x-4)(x-2)}{e^x}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{-(x-4)(x-2)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{-(x-4)}=\frac{0}{-(2-4)}=0$$

Θέμα 4ο:

A. $f(x)=e^{2x}$

i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $A(x_0,f(x_0))$ είναι η $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$ όπου $\alpha=f'(x_0)$

οπότε $f'(x)=(e^{2x})'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$

άρα $y=2e^{2x_0}\cdot x+\beta$ (1)

Αρκεί λοιπόν να βρούμε το β . Όμως το A($x_0,f(x_0)$) επαληθεύει την ε άρα από την (1) έχουμε :

$f(x_0)=2\cdot e^{2x_0}\cdot x_0+\beta \Rightarrow \beta=f(x_0)-2x_0\cdot e^{2x_0}\Rightarrow$

$\beta=e^{2x_0}-2x_0\cdot e^{2x_0}=e^{2x_0}(1-2x_0)$

Άρα η (1) $\Rightarrow y=2e^{2x_0}\cdot x+e^{2x_0}(1-2x_0)$ (2)

ii. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0) η εφαπτόμενη πρέπει να επαληθεύεται από το σημείο αυτό . Για x=0 , y=0 η (2) δίνει :

$0=2e^{2x_0}\cdot 0+e^{2x_0}\cdot(1-2x_0)\Leftrightarrow e^{2x_0}(1-2x_0)=0\Leftrightarrow$

$e^{2x_0}=0$ αδύνατη ή $1-2x_0=0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$

Για $x_0=\frac{1}{2}$ η (2) : $y=2\cdot e^{2\frac{1}{2}}\cdot x+e^{2\frac{1}{2}}(1-2\frac{1}{2})$

δηλαδή y=2ex

B. i Είναι $x(t)=t(t-2)^2$

Η ταχύτητα του κινητού θα είναι :

$\upsilon(t)=x'(t)=\left[t(t-2)^2\right]'=(t)'\cdot(t-2)^2+t\cdot\left[(t-2)^2\right]'=$

$=(t-2)^2+t\cdot 2(t-2)(t-2)'=(t-2)^2+2t(t-2)$

$=t^2-4t+4+2t^2-4t=3t^2-8t+4$

και το μέτρο της ταχύτητας $|\upsilon(t)|=\left|3t^2-8t+4\right|$

ii. Η επιτάχυνση θα είναι :

$$\alpha(t)=\upsilon'(t)=(3t^2-8t+4)'=6t-8$$

οπότε σε χρόνο t=1sec είναι : $\alpha(1)=6\cdot 1-8=-2m/sec^2$

και $|\alpha(1)|=|-2|m/sec^2=2m/sec^2$

iii. Το σημείο θα είναι ακίνητο όταν :

$\upsilon(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-8t+4=0$, Δ=16>0

άρα $t_{1,2}=\dfrac{8\pm 4}{6}=$ δηλαδή t_1=2sec ή $t_2=\dfrac{2}{3}$sec

Άρα είναι ακίνητο τις χρονικές στιγμές t=2sec και t=$\dfrac{2}{3}$sec

iv. Κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν :

$\upsilon(t)>0 \Leftrightarrow t<\dfrac{2}{3}$sec και t>2sec . Όμως t>0sec

άρα τελικά $t\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$.

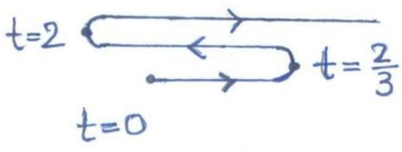
Κινείται στην αρνητική κατεύθυνση όταν :

$\upsilon(t)<0 \Leftrightarrow t\in\left(\dfrac{2}{3},2\right)$

v. Ο πίνακας προσήμων της ταχύτητας είναι στο διπλανό σχήμα .

t	0		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
υ(t)	‖	+	0	-	0	+	

Σχηματικά η κίνηση του σημείου είναι :



Άρα από t=0 μέχρι $t=\dfrac{2}{3}$ το διάστημα που διανύει το κινητό είναι : $S_1=\left|x\left(\dfrac{2}{3}\right)-x(0)\right|=\left|\dfrac{32}{27}-0\right|=\dfrac{32}{27}\,m$

Από $t=\dfrac{2}{3}$ μέχρι t=2 το διάστημα που διανύει είναι :

$$S_2=\left|x(2)-x\left(\dfrac{2}{3}\right)\right|=\left|0-\dfrac{32}{27}\right|=\dfrac{32}{27}\,m$$

Άρα το ολικό διάστημα που διανύει στη διάρκεια των δύο πρώτων δευτερολέπτων είναι :

$$S_{ΟΛ}=S_1+S_2=\dfrac{32}{27}+\dfrac{32}{27}=\dfrac{64}{27}\,m$$