ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

133

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**
Ύλη: Συναρτήσεις-Στατιστική **Γεν. Παιδείας**
29-1-12

Θέμα 1

Α. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, ..., x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής x που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν , όπου κ , ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \le \nu$

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , i=1,2,...,k; **(Μον.3)**

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, i=1,2,...,k; **(Μον.3)**

γ. Να αποδείξετε ότι :

i) $0 \le f_i \le 1$ για i=1,2,...,k; **ii)** $f_1 + f_2 + ... + f_k = 1$ **(Μον.4)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως (Σ) ή (Λ)

α. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής x είναι αρνητικός αριθμός **Σ Λ**

β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ **Σ Λ**

γ. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς . **Σ Λ**

δ. Για κάθε $x \ne 0$ ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ **Σ Λ**

ε. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x = x_0$ ελάχιστο . **Σ Λ**

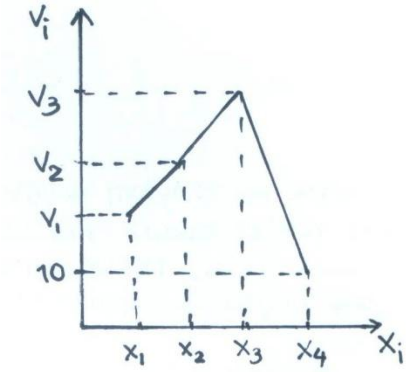
(Μον.10)

Γ. α. Ποια είναι τα μέτρα θέσης και ποια τα μέτρα διασποράς; **(Μον.3)**

β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ενός δείγματος ν παρατηρήσεων **(Μον.2)**

<u>Θέμα 2^{o}:</u>

Το διπλανό σχήμα παριστάνει το πολύγωνο συχνοτήτων των παρατηρήσεων x_i από έναν πληθυσμό μεγέθους ν=100 .
Αν ισχύει $2\nu_2=\nu_1+\nu_3$



1. Να βρεθεί η διαφορά $N_3-\nu_2$ **(Μον.8)**

2. Αν οι αριθμοί ν_1,ν_3 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\nu_1+\nu_3)\cdot x+800=0$ να βρείτε τις συχνότητες όλων των παρατηρήσεων. **(Μον.8)**

3. Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα **(Μον.9)**

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+1}, x\neq -1$

1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο Α(7,6) είναι η $y=\dfrac{5}{4}x-\dfrac{11}{4}$ **(Μον.8)**

2. Έστω $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),..,M_{10}(x_{10},y_{10})$ 10 τυχαία σημεία της προηγούμενης εφαπτομένης .Αν οι τετμημένες τους έχουν μέση τιμή 9 και τυπική απόκλιση 2 , να βρεθεί :

α. Η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση S_y των τεταγμένων των σημείων αυτών **(Μον.12)**

β. Να εξεταστούν ως προς την ομοιογένεια οι τιμές των τεταγμένων . **(Μον.5)**

Θέμα 4ο:

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι απουσίες που έκαναν 40 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου .Αν γνωρίζουμε ότι :

$[-)$	ν_i
$[0,25)$	ν_1
$[25,50)$	ν_2
$[50,75)$	ν_3
$[75,100)$	ν_4

- Το ν_1 ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=(x^2-2)^4$ στο $x_0=-1$
- $\nu_2=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x}{x^2-5x+6}$ και
- το ν_3 ισούται με το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x)=2x^2-8x+18$ τότε:

1. Να βρεθούν οι συχνότητες ν_1 , ν_2 , ν_3 , ν_4 **(Μον.7)**

2. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων , απόλυτων και αθροιστικών **(Μον.6)**

3. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών Συχνοτήτων και να υπολογίσετε τη διάμεσο **(Μον.6)**

4. Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που έκαναν από 60 έως 75 απουσίες , αν θεωρήσουμε ότι τα δεδομένα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα . **(Μον.6)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα1ο:

Α. α. Ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων, ονομάζεται (απόλυτη) **συχνότητα** ν_i της x_i.

β. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος προκύπτει η **σχετική συχνότητα f_i** της τιμής x_i , δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, ..., k$$

γ.i) Για i=1,2,...,k είναι $0 \le \nu_i \le \nu \Rightarrow \frac{0}{\nu} \le \frac{\nu_i}{\nu} \le \frac{\nu}{\nu} \Rightarrow 0 \le f_i \le 1$

ii) Είναι $f_1 + f_2 + ... + f_k = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_k}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$

Β. αΛ , βΛ , γΛ , δΛ , εΛ

Γ. α$_1$) Μέτρα θέσης είναι τα :

- Μέση τιμή $(\bar{x})$
- Σταθμικός μέσος $(\bar{x}_w)$
- Διάμεσος (δ)

α$_2$) Μέτρα διασποράς είναι τα :

- Εύρος (R)
- Διακύμανση (s^2)
- Τυπική απόκλιση (s)
- Συντελεστή μεταβολής (CV)

Β) Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση , όταν το ν είναι περιττός αριθμός , ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός .

Θέμα 2°:

1. Γνωρίζουμε ότι $2v_2 = v_1 + v_3$ (1)

Επίσης $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 100 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2v_2 + v_2 + 10 = 100 \Rightarrow 3v_2 = 90 \Rightarrow$ $\boxed{v_2 = 30}$. Επομένως $v_1 + v_3 = 60$ (3)

Είναι $N_3 - V_2 = (v_1 + v_2 + v_3) - v_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow$ $\boxed{N_3 - V_2 = 60}$

2. Αφού v_1, v_3 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (v_1 + v_3)x + 800 = 0$, θα ισχύει $v_1 \cdot v_3 = 800$ (4) (σχέσεις Vieta) Από (3) και (4) προκύπτει

$\boxed{v_3 = 40}$, $\boxed{v_1 = 20}$ $(v_1 < v_2)$

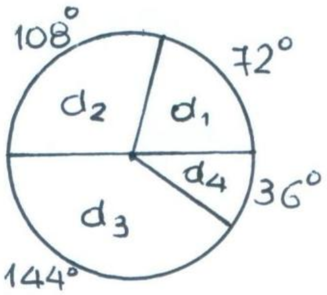
3. Είναι :

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{v} \cdot 360^0 = \frac{20}{100} \cdot 360^0 = 72^0$$

$$\alpha_2 = \frac{v_2}{v} \cdot 360^0 = \frac{30}{100} \cdot 360^0 = 108^0$$

$$\alpha_3 = \frac{v_3}{v} \cdot 360^0 = \frac{40}{100} \cdot 360^0 = 144^0$$

$$\alpha_4 = \frac{v_4}{v} \cdot 360^0 = \frac{10}{100} \cdot 360^0 = 36^0$$



Θέμα 3°:

1. Η f έχει $f'(x) = \left(\frac{x^2 - 5}{x + 1}\right)' = \frac{(x^2 - 5)'(x + 1) - (x^2 - 5)(x + 1)'}{(x + 1)^2} =$

$$= \frac{2x(x + 1) - (x^2 - 5)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 5}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x + 1)^2} .$$

Αν $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Για να διέρχεται από το σημείο A(7,6) Πρέπει: $6 - f(x_0) = f'(x_0)(7 - x_0) \Leftrightarrow$

$6(x_0+1)^2-(x_0^2-5)(x_0+1)=(x_0^2+2x_0+5)(7-x_0) \Leftrightarrow$
$6x_0^2+12x_0+6-x_0^3-x_0^2+5x_0+5=7x_0^2-x_0^3+14x_0-2x_0^2+35-5x_0$
$\Leftrightarrow x_0=3$
Η ε λοιπόν είναι η ε: $y-f(3)=f'(3)(x-3)$ δηλ $\boxed{\varepsilon: y=\frac{5}{4}x+\frac{11}{4}}$

2. α. Είναι $\bar{y}=\frac{5}{4}\bar{x}-\frac{11}{4}=\frac{5}{9}\cdot 9-\frac{11}{4}=\frac{17}{2} \Rightarrow \boxed{\bar{y}=\frac{17}{2}}$

και $s_y=\frac{5}{4}s_x=\frac{5}{4}\cdot 2 \Rightarrow \boxed{s_y=\frac{5}{2}}$

β. Είναι $CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{17}{2}}=\frac{5}{17}=0,29$ ή 29%

οπότε οι τεταγμένες των σημείων $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ δεν συνιστούν ομοιογενές δείγμα .

<u>Θέμα 4ο:</u>

1. ● Είναι $f'(x)=\left[(x^2-2)^4\right]'=4(x^2-2)^3(x^2-2)'=8x(x^2-2)^3$

οπότε $v_1=f'(-1)=8(-1)\left[(-1)^2-2\right]^3=(-8)(-1) \Rightarrow \boxed{v_1=8}$

● Επίσης $v_2=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x^2-9)}{(x-3)(x-2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=18$ άρα $\boxed{v_2=18}$

● Η $g(x)=2x^2-8x+18$ έχει $g'(x)=4x-8$ και αν $g'(x)\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x-8\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$.Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολών ,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	−	0	+
f	↘		↗

προκύπτει ότι η g έχει ελάχιστο το g(2)=10 .Άρα $\boxed{v_3=10}$

● Είναι $v_1+v_2+v_3+v_4=40$ οπότε $\boxed{v_4=4}$

2. Με βάση τους αντίστοιχους τύπους προκύπτει ο πίνακας .

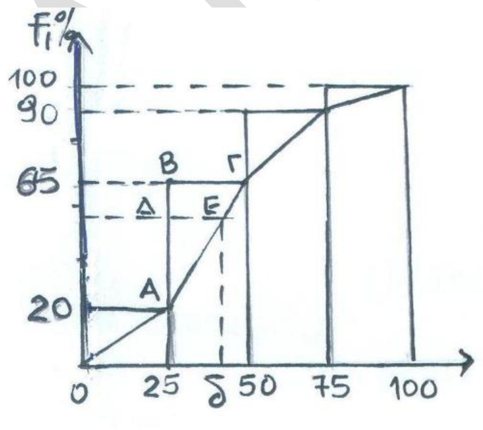
$[-)$	x_i	V_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
$[0,25)$	12,5	8	0,2	20	8	0,20	20
$[25,50)$	37,5	18	0,45	45	26	0,65	65
$[50,75)$	62,5	10	0,25	25	36	0,90	40
$[75,100)$	87,5	4	0,10	10	40	1	100
Σύνολο		40	1	100			

3. Είναι $AB\Gamma \approx A\Delta E$ οπότε

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{30}{45} = \frac{x}{25} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{50}{3} \simeq 16,66 \text{ οπότε}$$

$$\delta = 25 + 16,66 \Rightarrow \boxed{\delta = 41,66}$$



4. Οι μαθητές με απουσίες από 60 έως 75 βρίσκονται στην κλάση

$[50,75)$ και το πλήθος τους είναι : $\frac{75-60}{75-50} \cdot 10 = 6$