ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

132

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη: Συναρτήσεις **Γεν. Παιδείας**

6-11-11

Θέμα 1ο

Α.α)Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

β)Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής στο Α;

γ)Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α.
Τι ονομάζουμε παράγωγο της f; **(Μον.3)**

Β.α)Δίνεται η συνάρτηση F(x)=f(x)+g(x). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: F΄(x)=f΄(x)+g΄(x). **(Μον.8)**

β)Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

cf(x), f(x)g(x), $\frac{f(x)}{g(x)}$ με g(x)≠0. **(Μον.3)**

Γ.α)Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Α **Συνάρτηση**	**Β** **Πρώτη παράγωγος**
α. $\sqrt[3]{x}$	**1.** 1-ημx
β. x+συνx	**2.** $3x^2$-8x
γ. xημx	**3.** 2x+3
δ. x^3-4x^2	**4.** ημx-xσυνx
	5. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
	6. $3x^2$-4x
	7. ημx+xσυνx

(Μον.8)

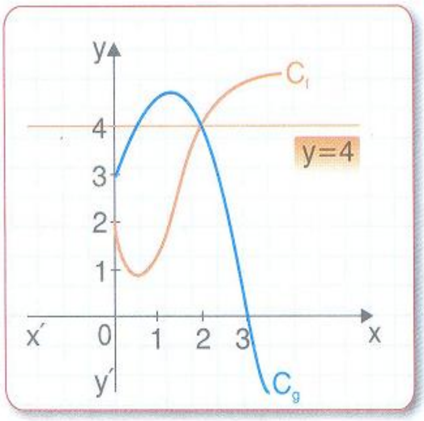
β)Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $x \neq 0$ είναι:

Α: e^x **Β:** $\frac{e^x - xe^x}{x^2}$ **Γ:** $\frac{e^x x + e^x}{x^2}$ **Δ:** $\frac{e^x x - e^x}{x^2}$ **Ε:** $\frac{xe^x - e^x}{x}$

(Μον.3)

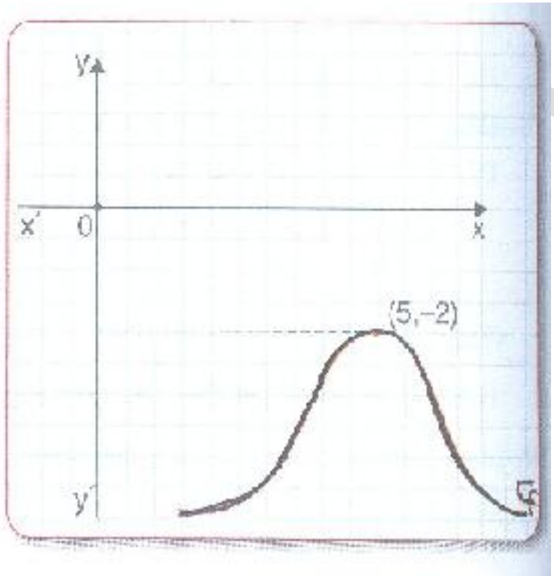
<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g. Να λυθεί η ανίσωση: $f^2(x)-f(x)\cdot g(x)>4[f(x)-g(x)]$.



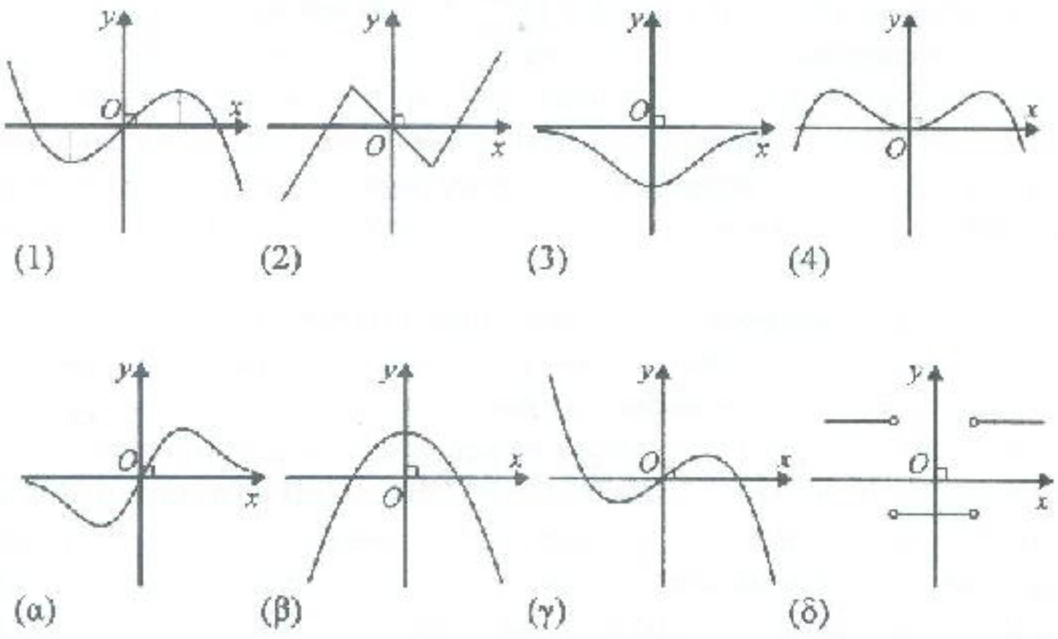
(Μον.5)

Β. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία έχει πεδίο ορισμού το R. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=8+f^3(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το οποίο και να βρεθεί.



(Μον.5)

Γ. Στην πρώτη γραμμή του παρακάτω πίνακα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων και στη δεύτερη γραμμή οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση στην παράγωγό της.



(Μον.4)

Δ. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) τρίτου βαθμού για το οποίο ισχύει: $P(0)=1$, $P'(-1)=-5$, $P'(-2)=5$ και $P''(-1)=-6$.

(Μον.6)

Ε. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-ax+\beta}{x^2+2}, & x\neq 2\\ 3, & x=2\end{cases}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α, β, αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x_o=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1).

(Μον.5)

Θέμα 3^{o}:

Α.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}(\alpha x^{2}+\beta x+9)$ με $\alpha,\beta\in R$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης f στο σημείο της $A(2,e^{2})$ είναι $y=-e^{2}x+3e^{2}$, τότε:

α.Να αποδείξετε ότι α=1 και β=-6. **(Μον.5)**

β.Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f. **(Μον.5)**

Β.Ένα υλικό σημείο κινείται πάνω στον άξονα x΄x και η θέση του, κάθε χρονική στιγμή, δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)=t^{3}-12t^{2}+45t-2$ όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα (s) με $t\in[0,10]$.

i)Να βρεθεί η αρχική θέση του σημείου.

ii)Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του.

iii)Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου, όταν είναι ακίνητο.

iv)Να βρείτε πότε κινείται δεξιά ή αριστερά

v)Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του κινητού. **(Μον.15)**

Θέμα 4^{o}:

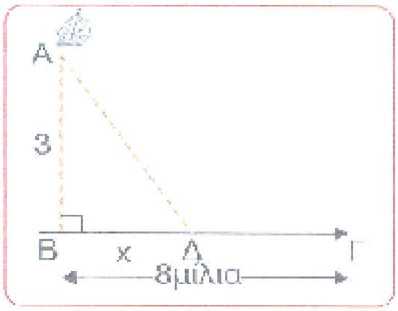
Α.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x-\ln(x^{2}+1)$.

α.Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **(Μον.8)**

β.Να λύσετε την ανίσωση:

$3x-\ln(x^{2}+1)<3x^{2}-\ln(x^{4}+1)$. **(Μον.7)**

Β.Ένας ψαράς βρίσκεται με τη βάρκα του στη θέση Α και το πλησιέστερο σημείο Β της ακτής απέχει 3 ναυτικά μίλια. Στη θέση Γ και σε απόσταση 8 ναυτικών μιλίων(ν.μ.) από το Β, βρίσκεται η ιχθυόσκαλα όπου θέλει να φτάσει για να πουλήσει τα ψάρια του. Αν η βάρκα κινείται με ταχύτητα 4 ν.μ./h και ο ψαράς πεζός κινείται με ταχύτητα 5 ν.μ./h, να βρεθεί η διαδρομή που πρέπει να κάνει, ώστε να φτάσει συντομότερα.



(Μον.10)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα1^o:

Α. α)Θεωρία **β)**Θεωρία **γ)**Θεωρία

Β. α)Θεωρία **β)**Θεωρία

Γ. α)$\alpha\to5,\ \beta\to1,\ \gamma\to7,\ \delta\to2$

β)Δ

Θέμα 2^o:

Α. Απ' την ανίσωση

$f^2(x)-f(x)\cdot g(x)>4\left[f(x)-g(x)\right]$ 'εχουμε:

$$f^2(x)-f(x)\cdot g(x)-4f(x)+4g(x)>0\Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot\left[f(x)-4\right]-g(x)\left[f(x)-4\right]>0\Leftrightarrow\left(f(x)-4\right)\cdot\left(f(x)-g(x)\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} f(x)-4>0 & ή & f(x)-4<0 \\ f(x)-g(x)>0 & & f(x)-g(x)<0\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} f(x)>4 & ή & f(x)<4 \\ f(x)>g(x) & & f(x)<g(x)\end{matrix}\right|\text{δηλ.}$$

$$\left.\begin{matrix} x>2 & ή & 0\le x<2 \\ x>2 & & 0\le x<2\end{matrix}\right|\text{δηλ. } 0\le x<2\ \ ή\ \ x>2$$

Β. Είναι: $f(x)\le-2\Leftrightarrow f^3(x)\le-8\Leftrightarrow 8+f^3(x)\le0\Leftrightarrow h(x)\le0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 0, στη θέση x=5.

Γ. $1\to\beta,\ 2\to\delta,\ 3\to\alpha,\ 4\to\gamma$.

Δ. Είναι $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\alpha\ne0$. Αφού $P(0)=1\Rightarrow\delta=1$

Είναι $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ και $P''(x)=6\alpha x+2\beta$ οπότε:

$$\left.\begin{matrix} P'(1)=-5 \\ P'(-2)=5 \\ P''(-1)=-6\end{matrix}\right|\Rightarrow\left.\begin{matrix} 3\alpha-2\beta+\gamma=-5 \\ 12\alpha-4\beta+\gamma=5 \\ -6\alpha+2\beta=-6\end{matrix}\right|\Rightarrow\ldots\Rightarrow\alpha=\frac{4}{3},\gamma=-7,\beta=1.$$

Άρα $P(x)=\frac{4}{3}x^3+x^2-7x+1$.

Ε. Είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\alpha x+\beta}{x^2+2}=\dfrac{8-2\alpha+\beta}{6}$ και $f(2)=3$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_o=2 ισχύει

$$\frac{8-2\alpha+\beta}{6}=3\Leftrightarrow 8-2\alpha+\beta=18\Leftrightarrow \beta=10+2\alpha \ (1).$$

Επειδή η C_f διέρχεται απ' το σημείο Α(1,1) θα είναι:

$$f(1)=1\Leftrightarrow \frac{1-\alpha+\beta}{3}=1\Leftrightarrow 1-\alpha+\beta=3\Leftrightarrow \beta=2+\alpha \quad (2)$$

Από (1) και $(2)\Rightarrow 10+2\alpha=2+\alpha\Leftrightarrow \alpha=-8$ και β=-6.

Θέμα 3ο:

Α.α)

Η $f(x)=e^x\left(\alpha x^2+\beta x+9\right)$ έχει

$$f'(x)=e^x\left(\alpha x^2+\beta x+9\right)+e^x(2\alpha x+\beta)=e^x\left(\alpha x^2+\beta x+2\alpha x+\beta+9\right)$$

Είναι $\left.\begin{array}{l} f(2)=e^2 \\ f'(2)=-e^2\end{array}\right|\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^2(4\alpha+2\beta+9)=e^2 \\ e^2(4\alpha+2\beta+4\alpha+\beta+9)=-e^2\end{array}\right|\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 4\alpha+2\beta+9=1 \\ 8\alpha+3\beta+9=-1\end{array}\right|\Leftrightarrow \alpha=1 \text{ και } \beta=-6$$

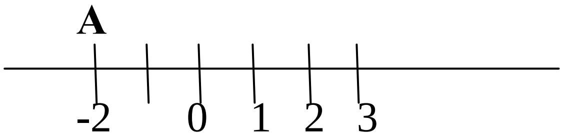
β) Είναι $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$ και οι ρίζες της οι x=1, x=3.

Πίνακας μεταβολών:

x	-∞	1		3	+∞
f΄	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗

Η f έχει: ● Τοπικό μέγιστο στο 1 το f(1).
● Τοπικό ελάχιστο στο 3 το f(3).

Β. i) Είναι x(0)=-2 άρα το σημείο βρίσκεται στη θέση Α,



ii)Η ταχύτητα είναι $\upsilon(t)=x'(t)=3t^2-24t+45$ και η επιτάχυνση
$$\alpha(t)=\upsilon'(t)=6t-24$$

iii)Το σημείο είναι ακίνητο όταν υ(t)=0 δηλ.

$3t^2-24t+45=0 \Leftrightarrow t^2-8t+15=0 \Leftrightarrow t=3$ ή $t=5$. Τότε η επιτάχυνση είναι: $\alpha(3)=6\cdot 3-24=-6$ μον.μήκους/s^2
$\alpha(5)=6\cdot 5-24=6$ μον.μήκους/s^2.

iv) ●Το σημείο κινείται δεξιά όταν $0<t<3$ ή $5<t<10$.

t	0		3		5		10
υ(t)		+	0	-	0	+	

●Αριστερά όταν $3<t<5$.

v)●Τη χρονική περίοδο [0,3] το σημείο διανύει διάστημα $S_1=|x(3)-x(0)|=|52+2|=54$.

●Τη χρονική περίοδο [3,5] διάστημα $S_2=|x(5)-x(3)|=|48-52|=4$.

●Τη χρονική περίοδο [5,10] διάστημα $S_3=|x(10)-x(5)|=|248-48|=200$.

Έτσι $S_{o\lambda}=54+4+200=258$.

Η μέση ταχύτητα είναι $\upsilon_\mu=\dfrac{S_{o\lambda}}{t}=\dfrac{258}{10}=25{,}8\mu o\nu/s$.

<u>Θέμα 4</u>

Α.α)Η $f(x)=3-\ln\left(x^2+1\right)$ ορίζεται στο Α=$\mathbb{R}$ και έχει

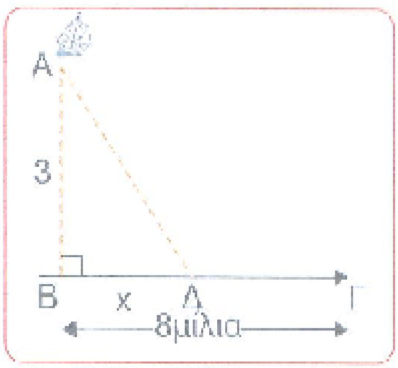
$$f'(x)=3-\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=3-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{3x^2-2x+3}{x^2+1}>0$$

γιατί το τριώνυμο $3x^2-2x+3$ έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 2-3<0$.

Η f λοιπόν είναι ↑ στο $\mathbb{R}$.

β)Η ανίσωση $3x-\ln\left(x^2+1\right)<3x^2-\ln\left(x^4+1\right)$ γράφεται $f(x)<f\left(x^2\right)$ και επειδή f ↑ είναι $x<x^2 \Leftrightarrow x^2-x>0 \Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$.

Β. Έστω ΑΔ η διαδρομή της βάρκας και ΔΓ η διαδρομή που θα κινηθεί ο ψαράς πεζός. Είναι $ΑΔ=\sqrt{9+x^2}$ και ο αντίστοιχος χρόνος $\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}$ και $(ΔΓ)=8-x$ με αντίστοιχο χρόνο $\frac{8-x}{5}$. Ο συνολικός χρόνος είναι



$t(x)=\frac{8-x}{5}+\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}, x\in[0,8]$.

Είναι :

$$t'(x)=\frac{1}{5}(8-x)'+\frac{1}{4}\left(\sqrt{9+x^2}\right)'=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}=\frac{-4\sqrt{9+x^2}+5x}{20\sqrt{9+x^2}}.$$

Αν $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -4\sqrt{9+x^2}+5x\geq 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{9+x^2}\leq 5x$ άρα

$16\cdot\left(9+x^2\right)\leq 25x^2 \Leftrightarrow x^2\geq 144$ άρα $x\geq 4$. Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x=4.

Πίνακας:

x	0	4	8
t΄	-	0	+
t	↘	ελ	↗

Η συνολική διαδρομή λοιπόν, ώστε να φτάσει ο ψαράς στην ιχθυόσκαλα συντομότερα είναι $(ΑΔ)+(ΔΓ)=\sqrt{9+16}+(8-4)=9ν.μ.$