ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 124

Υλη: Μιγαδικοί-Συναρτήσεις **5-10-14**

Γ΄ Λυκείου

Ον/μο:……………….. **Θετ-Τεχν.Κατ.**

ΘΕΜΑ Α

Α1. 1. Δώστε τον ορισμό του συνόλου C των μιγαδικών αριθμών **(μον.5)**

2. Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$

(μον.10)

Α2. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. Ισχύει $3+4i>-2+i$ **Σ Λ**

2. $z^2+u^2=0,\ z,u\in\mathbb{C}\Leftrightarrow z=u=0$ **Σ Λ**

3. Αν η f έχει πεδίο ορισμού Α=$[3,5]$ και σύνολο τιμών $f(A)=[7,10]$ τότε ορίζεται η fof **.** **Σ Λ**

4. Αν μια συνάρτηση f είναι "1−1" στο πεδίο ορισμού της τότε είναι και γνησίως μονότονη σ’ αυτό. **Σ Λ**

5. Η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)+2$ είναι "1−1" **Σ Λ**

6. Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει τον z_1 φανταστική ρίζα τότε β=0. **Σ Λ**

7. $|z-w|^2=(z-w)^2$ **Σ Λ**

8. $|z_1|-|z_2|\le|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$ **Σ Λ**

9. $f^{-1}(f(x))=x,\quad x\in A \quad$ και $\quad f(f^{-1}(x))=x,\quad x\in A$ **Σ Λ**

10. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε η συνάρτηση –f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. **Σ Λ**

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ και $g(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

Να δείξετε ότι :

1. η g είναι "1 − 1" **(μον.4)**

2. $(gof)(x)=x$ **,** για κάθε $x\in R$ **(μον.4)**

3. $g^{-1}=f$ **(μον.4)**

4. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.4)**

5. Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\nu$ ισχύει:

$g\left(\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right|+...+\left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|\right)<g(1)$ να αποδειχθεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός. **(μον.4)**

Β2. Να βρείτε τις συναρτήσεις f , ώστε αν $g(x)=-x^2$, να ισχύει $(f\circ g)(x)=\sqrt{1+x^2}$ **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για τους μιγαδικούς z ισχύει : $|z-1-i|=|z+5+3i|$

1. Να βρείτε που βρίσκονται οι εικόνες των z **(μον.4)**

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των **i)** $|z|$ **ii)** $|z-1+3i|$ **(μον.6)**

Γ2. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει :
$|z-1+2i|+|w-2-3i|=0$ και η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$

1. Να βρείτε τις εικόνες Α , Β των μιγαδικών z, w αντίστοιχα **(μον.3)**

2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα αν γνωρίζετε ότι η C_f διέρχεται από τα σημεία Α και Β **(μον.3)**

3. Να λύσετε την εξίσωση $f(-1+f^{-1}(x^2+x+1))=-2$ **(μον.3)**

4. Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2-3x)+1)<3$ **(μον.3)**

5. Αν $f(|2z-1|)=f(|z-2|)$ βρείτε το $|z|$. **(μον.3)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le \lambda\ln\lambda \\ 2e^x-3, & x\ge 2\ln\lambda \end{cases}$

1. Να βρείτε την ακέραια τιμή του λ ώστε η f να είναι συνάρτηση. **(μον.3)**

2. Αν λ=2 εξετάστε αν η f αντιστρέφεται. **(μον.4)**

3. Στην περίπτωση που η f αντιστρέφεται , εξετάστε αν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινά σημεία. **(μον.3)**

4. Αν ο θετικός ακέραιος ν επαληθεύει την εξίσωση: $(8+6i)^{\nu}-82=10^{\nu-1}-(1-i)^6\cdot i$,να συγκριθούν οι αριθμοί f(ν) και f(ln7). **(μον.4)**

Δ2. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με την ιδιότητα $f(x)-f(y)=f(\frac{x}{y})$ για κάθε x,y>0. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα, τότε:

1.Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. **(μον.4)**

2.Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2+3)+f(x)=f(x^2+1)+f(x+1)$. **(μον.3)**

3.Αν ακόμη είναι f(x)>0 για κάθε x>1, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. 1 και 2 θεωρία στο σχολικό βιβλίο.

Α2. 1Λ, 2Λ, 3Λ, 4Λ, 5Λ, 6Σ, 7Λ, 8Σ, 9Λ, 10Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

1. Για την $g(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ πρέπει

$\frac{1+x}{1-x}>0 \Leftrightarrow (1+x)\cdot(1-x)>0 \Leftrightarrow -1<x<1$ άρα $A_g=(-1,1)$.

Αν $x_1,x_2\in A_g$ με $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow \ln\frac{1+x_1}{1-x_1}=\ln\frac{1+x_2}{1-x_2}\Rightarrow \frac{1+x_1}{1-x_1}=\frac{1+x_2}{1-x_2}$

$\Rightarrow (1+x_1)(1-x_2)=(1+x_2)(1-x_1)\Rightarrow 1-x_2+x_1-x_1x_2=1-x_1+x_2-x_1x_2$

$\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$.Αρα η g είναι 1-1.

2. Η $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A_f=\mathbb{R}$. Η $g\circ f$, αν ορίζεται, θα ορίζεται για τα

$$\left.\begin{matrix} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\in\mathbb{R} \\ -1<\frac{e^x-1}{e^x+1}<1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow -e^x-1<e^x-1<e^x+1 \Leftrightarrow$$

$-e^x-1<e^x-1$ και $e^x-1<e^x+1 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Αρα $A_{g\circ f}=\mathbb{R}$.

Ο τύπος της είναι:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\ln\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=\ln\frac{1+\frac{e^x-1}{e^x+1}}{1-\frac{e^x-1}{e^x+1}}=\ln\frac{e^x+1+e^x-1}{e^x+1-e^x+1}=$$

$$=\ln\frac{2e^x}{2}=\ln e^x=x.$$ Αρα $(g\circ f)(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

3.Εχουμε: $(g\circ f)(x)=x\Rightarrow g(f(x))=x\overset{g1-1}{\Rightarrow} g^{-1}(g(f(x)))=g^{-1}(x)\Rightarrow$

$f(x)=g^{-1}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $g^{-1}=f$.

4. Εστω $x_1, x_2 \in A_g$ ωστε $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2} \quad (1)$$

Επίσης: $x_1 < x_2 \Rightarrow 1+x_1 < 1+x_2$ (2).

Πολλαπλασιάζω τις (1) και (2) κατά μέλη (έχουν θετικούς όρους) και τότε είναι: $\dfrac{1+x_1}{1-x_1} < \dfrac{1+x_2}{1-x_2} \Rightarrow \ln\dfrac{1+x_1}{1-x_1} < \ln\dfrac{1+x_2}{1-x_2} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

5. Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα η δοθείσα ανισότητα γίνεται:

$$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right| + \left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right| + \ldots + \left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right| < 1.$$

Εστω τώρα ότι κάποιος απ' τους $z_1, z_2, ..., z_\nu$, ο z_κ για παράδειγμα είναι πραγματικός αριθμός. Τότε οι $z_\kappa - i$ και $z_\kappa + i$ είναι συζυγείς οπότε $\left|\dfrac{z_\kappa - i}{z_\kappa + i}\right| = \dfrac{|z_\kappa - i|}{|z_\kappa + i|} = 1$ άτοπο λόγω της δοθείσας ανισότητας.

Κανένας λοιπόν απ' τους $z_1, z_2, ..., z_\nu$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

B2.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A_g = \mathbb{R}$.Επειδή $A_{f\circ g} = A_g = \mathbb{R}$ θα ισχύει $g(\mathbb{R}) \subseteq A_f$.Ομως $g(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$. Αρα $g(\mathbb{R}) = (-\infty, 0] \subseteq A_f$.

Είναι: $f(g(x)) = \sqrt{1+x^2}$ άρα $f(-x^2) = \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1-(-x^2)}$ και αν $-x^2 = y \le 0$ τότε $f(y) = \sqrt{1-y},\ y \le 0$ δηλ. η f στο $(-\infty, 0]$ έχει τύπο $f(x) = \sqrt{1-x}$.Στο $A_f - g(\mathbb{R})$ η f μπορεί να οριστεί με οποιονδήποτε τρόπο. Υπάρχουν επομένως άπειρες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις υποθέσεις του ερωτήματος αυτού. Αυτές δίνονται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1\text{-}x}, & x \in (\text{-}\infty, 0] \\ h(x), & x \in A_f \text{ -}(\text{-}\infty, 0] \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

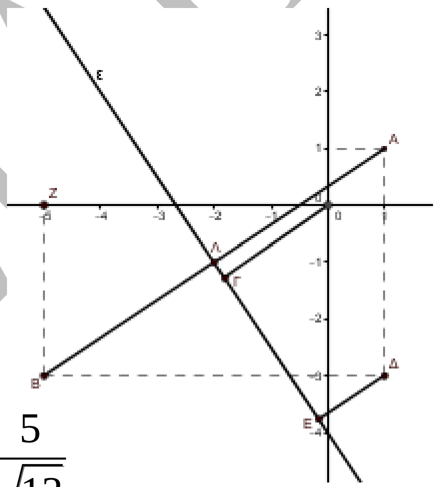
1. Απ' την ισότητα $|z-1-i|=|z+5+3i| \Leftrightarrow |z-(1+i)|=|z-(-5-3i)|$ οπότε οι εικόνες του z βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ με Α(1,1) και Β(-5,-3).

2.

α) Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{-3-1}{-5-1}=\dfrac{2}{3}$ και το μέσο Λ του ΑΒ είναι το $\Lambda(\dfrac{1-5}{2},\dfrac{1-3}{2})$ δηλ. Λ(-2,-1) . Η ε έχει εξίσωση

$$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-(-2)) \Rightarrow 2y+2=-3x-6 \Rightarrow$$

$$\varepsilon: 3x+2y+8=0$$



Ετσι:

i) $|z|_{min}=d(O,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 0+2\cdot 0+8|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{13}}$

και

ii) $|z-1-3i|_{min}=d(\Delta,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+2\cdot(-3)+8|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$

Γ2.

1. Εχουμε ότι

$|z-1+2i|+|w-2-3i|=0 \Leftrightarrow |z-(1-2i)|=0$ και $|w-(2+3i)|=0$ οπότε $z=1-2i$ και w=2+3i . Αρα Α(1,-2) και Β(2,3).

2. Αφού η f είναι γνησίως μονότονη ,1<2 και -2<3 δηλ. f(1)<f(2) η f είναι γνησίως αύξουσα.

3.

Η εξίσωση $f(-1+f^{-1}(x^2+x+1))=-2 \Leftrightarrow f(-1+f^{-1}(x^2+x+1))=f(1)$

$$\underset{f\uparrow}{\overset{f\,1-1}{\Longleftrightarrow}} -1+f^{-1}(x^2+x+1)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2+x+1)=2 \Leftrightarrow$$

$f^{-1}(x^2+x+1)=f^{-1}(3) \Leftrightarrow x^2+x+1=3 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή x=-2

4.Η ανίσωση

$$f(f^{-1}(x^2-3x)+1)<3 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x^2-3x)+1)<f(2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x^2-3x)+1<2$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2-3x)<1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x^2-3x)<f(1) \Leftrightarrow x^2-3x<-2$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow 1<x<2$$

5.Απ' την ισότητα $f(|2z-1|)=f(|z-2|)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}$

$$|2z-1|=|z-2| \Leftrightarrow |2z-1|^2=|z-2|^2 \Leftrightarrow (2z-1)(\overline{2z-1})=(z-2)(\overline{z-2}) \Leftrightarrow$$
$$(2z-1)(2\bar{z}-1)=(z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow 4z\bar{z}-2z-2\bar{z}+1=z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow$$
$$3z\bar{z}=3 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1 .$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

1.Για να είναι η $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le\lambda\ln\lambda \\ 2e^x-3, & x\ge 2\ln\lambda \end{cases}$ συνάρτηση πρέπει κατ' αρχάς

να είναι $\lambda\ln\lambda\le 2\ln\lambda, \lambda>0 \Leftrightarrow \lambda\ln\lambda-2\ln\lambda\le 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)\ln\lambda\le 0 \Leftrightarrow$
($\ln\lambda\le 0$ και $\lambda-2\ge 0$) ή ($\ln\lambda\ge 0$ και $\lambda-2\le 0$) $\Leftrightarrow$ ($\lambda\le 1$ και $\lambda\ge 2$, αδύνατο)
ή ($\lambda\ge 1$ και $\lambda\le 2$) δηλ. $1\le\lambda\le 2$.
Επειδή λ ακέραιος έχουμε τις περιπτώσεις:

● Αν λ=1 τότε $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le 0, \text{με } f(0)=2 \\ 2e^x-3, & x\ge 0, \text{με } f(0)=-1 \end{cases}$ άρα η f δεν είναι συνάρτηση.

● Αν λ=2 τότε $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le \ln 4, \text{με } f(\ln 4)=5 \\ 2e^x-3, & x\ge \ln 4, \text{με } f(\ln 4)=5 \end{cases}$

άρα για λ=2 η f είναι συνάρτηση.

2. Για λ=2 έχουμε τις περιπτώσεις:

● Αν $x\le\ln 4$ η εξίσωση

$$f(x)=y \Leftrightarrow e^x+1=y \Leftrightarrow e^x=y-1 \overset{y>1}{\Leftrightarrow} \ln e^x=\ln(y-1) \Leftrightarrow x=\ln(y-1) .$$

Πρέπει $x\le\ln 4 \Leftrightarrow \ln(y-1)\le\ln 4 \Leftrightarrow y-1\le 4 \Leftrightarrow y\le 5$. Άρα $f(A_1)=(1,5]$.

●Αν $x \ge \ln 4$ η εξίσωση f(x)=y $\Leftrightarrow 2e^x - 3 = y \Leftrightarrow 2e^x = y+3 \Leftrightarrow$

$e^x = \frac{y+3}{2} \Leftrightarrow \ln e^x = \ln\frac{y+3}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y+3}{2}$

Πρέπει $x \ge \ln 4 \Leftrightarrow \ln\frac{y+3}{2} \ge \ln 4 \Leftrightarrow \frac{y+3}{2} \ge 4 \Leftrightarrow y+3 \ge 8 \Leftrightarrow y \ge 5.$

Αρα $f(A_2) = [5, +\infty)$.

Επειδή η λύση ως προς x , $\forall y$,είναι μοναδική , η f είναι 1-1 στο $A_2 = [\ln 4, +\infty)$.

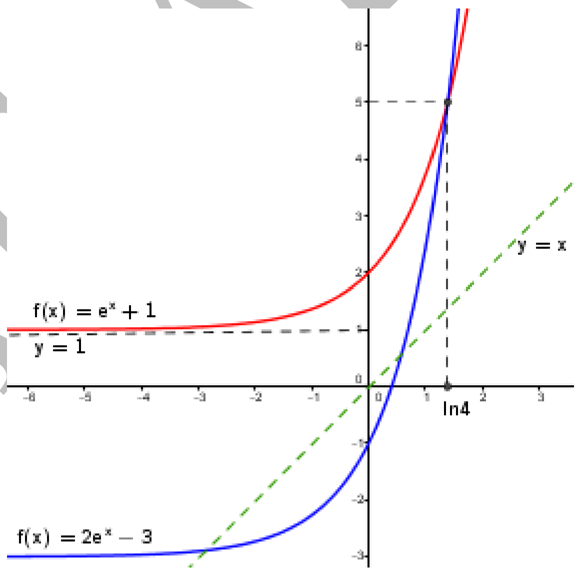
Επειδή τα σύνολα τιμών των δύο κλάδων δεν έχουν κοινά στοιχεία, η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της οπότε αντιστρέφεται.

3.Επειδή $e^x + 1 > x$ στο $(-\infty, \ln 4]$ και $2e^x - 3 > x$ στο $[\ln 4, +\infty)$,

η C_f βρίσκεται πάνω απ' την y=x.

Αρα η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω απ' την y=x,αφού οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την y=x.

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ λοιπόν δεν έχουν κοινά σημεία.



4.Η εξίσωση $(8+6i)^\nu - 82 = 10^{\nu-1} - (1-i)^6 \cdot i$ γράφεται:

$(8+6i)^\nu - 82 = 10^{\nu-1} - ((1-i)^2)^3 \cdot i \Leftrightarrow (8+6i)^\nu - 82 = 10^{\nu-1} - (-2i)^3 \cdot i$

$\Leftrightarrow (8+6i)^\nu - 82 = 10^{\nu-1} - 2^3 i \cdot i \Leftrightarrow (8+6i)^\nu - 82 = 10^{\nu-1} + 8 \Leftrightarrow$

$(8+6i)^\nu = 10^{\nu-1} + 90 \Leftrightarrow \left|(8+6i)^\nu\right| = \left|10^{\nu-1} + 90\right| \Leftrightarrow \left|(8+6i)\right|^\nu = 10^{\nu-1} + 90$

$\Leftrightarrow \sqrt{8^2+6^2}^{\,\nu} = 10^{\nu-1} + 90 \Leftrightarrow 10^\nu = 10^{\nu-1} + 90 \Leftrightarrow 10^\nu - 10^{\nu-1} = 90$

$\Leftrightarrow 10^\nu - \frac{10^\nu}{10} = 90 \Leftrightarrow 10^\nu(1 - \frac{1}{10}) = 90 \Leftrightarrow 10^\nu \frac{9}{10} = 90 \Leftrightarrow 10^\nu = 10^2$

$\Leftrightarrow$ν=2.

Εχουμε τώρα: Η f είναι γνησίως αύξουσα γιατί είναι γνησίως αύξουσα κατά κλάδο και τα σύνολα τιμών των δύο κλάδων δεν έχουν κοινά στοιχεία και:

$e^2 \approx (2,7)^2 = 7,29 > 7$ δηλ. $e^2 > 7 \Leftrightarrow \ln e^2 > \ln 7 \Leftrightarrow$

$2 > \ln 7 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(2) > f(\ln 7)$.

Δ2.

1.Για $x = y = 1$ η ισότητα $f(x) - f(y) = f(\frac{x}{y})$ γίνεται

$f(1) - f(1) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$ και επειδή η f έχει μοναδική ρίζα αυτή είναι η x=1. Εστω τώρα

$x_1, x_2 \in A_f$ και $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0$ αρα $f(\frac{x_1}{x_2}) = 0$ οπότε

$\frac{x_1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Αρα η f είναι 1-1.

2. Η εξίσωση $f(x^2+3) + f(x) = f(x^2+1) + f(x+1)$ γράφεται:

$f(x^2+3) - f(x^2+1) = f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right) = f\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow x^3 + 3x = x^3 + x^2 + x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

3. Εστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$x_1 > x_2$ και $f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \le 0 \Rightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \le 0$ **(1)**

Όμως $\frac{x_1}{x_2} > 1$ και επειδή f(x)>0 για κάθε x>1 θα είναι και $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0$

οπότε η (1) είναι άτοπο.

Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα.