# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**105**

**Ον/μο:………………..** **Α΄ Λυκείου**

**Υλη:Απόλυτες τιμές** **9-11-2019**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.**Να γράψετε τα σύνολα των αριθμών που γνωρίζετε. **(μον.5)**

**Α2.**Να συμπληρώσετε τα κενά:

**1.** $x_1 \cdot x_2 \cdots x_\nu = 0 \Leftrightarrow$ ............................

**2.** $x_1 \cdot x_2 \cdots x_\nu \neq 0 \Leftrightarrow$ ............................

**3.** $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \cdots + x_\nu^{\,2} = 0 \Leftrightarrow$ ............................

**4.** $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_\nu| = 0 \Leftrightarrow$ ............................

**5.** $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_\nu} = 0 \Leftrightarrow$ ............................ **(μον.5)**

**Α3.**Να αποδείξετε ότι $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ για οποιουσδήποτε $x, y \in R$. **(μον.10)**

**Α4.**Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις:

**1.** $(x+y)^2 - 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2 = 4x^2$ . Σ Λ

**2.**Οι πράξεις μεταξύ άρρητων αριθμών δίνουν άρρητο αριθμό. Σ Λ

**3.** $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$. Σ Λ

4.$|x+y| = |x| + |y|$. Σ Λ

**5.** $\sqrt{x^2} = x$ . Σ Λ

**(μον.5)**

## ΘΕΜΑ Β

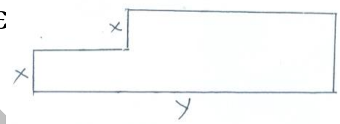
**Β1.**Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in R$ ισχύει: $x^2 + y^2 \geq 2xy$. **(μον.6)**

**Β2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y > 0$ ισχύει: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ . **(μον.6)**

**Β3.**Για τους θετικούς αριθμούς x και y ισχύει: $x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{15}{2}$.

Με τη βοήθεια των Β1 και Β2 να αποδείξετε ότι $x \cdot y \leq \frac{11}{4}$. **(μον.3)**

**Β4.**Αν $|x-1|<0,1$ και $|y-4|<0,2$ να εκτιμήσε την τιμή της περιμέτρου του σχήματος.




**(μον.7)**

**Β5.**Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=5+5^2+5^3+...+5^{90}$ διαιρείται με το 5 και το 31. **(μον.3)**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί $x = \sqrt{3}+1$ και $y=\sqrt{3}-1$.

**Γ1.**Να αποδείξετε ότι $x^2 + y^2 = 8$. **(μον.6)**

**Γ2.**Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = x^2 + y^2 + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$. **(μον.6)**

**Γ3.**Με τη βοήθεια του Γ1 ερωτήματος να αποδείξετε ότι:
$\sqrt{x^4 - 4y^2 + 36} + \sqrt{y^4 - 10x^2 + 105} = 15$. **(μον.3)**

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $d(2x,1) < 1$ .

**Γ4.**Να αποδείξετε ότι 0<x<1. **(μον.5)**

**Γ5.**Να διατάξετε απ' τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $1,\ x^{-1},\ x^{-2},\ x,\ x^2,\ x^3$. **(μον.5)**

**<u>ΘΕΜΑ Δ</u>**

Θεωρούμε την παράσταση $\Pi=(x+y)^2-2(x-y+xy)+18$.

**Δ1.**Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$. **(μον.5)**

**Δ2.**Αν Π=16 βρείτε τους αριθμούς x και y. **(μον.5)**

**Δ3.**Βρείτε την τιμή της παράστασης Π αν για τους αριθμούς x και y ισχύει: $\left|x-\sqrt{3}\right|+y^2-2\sqrt{3}\cdot y+3=0$. **(μον.5)**

**Δ4.**Αν $x\notin(\alpha,\beta)$ αποδείξτε ότι: $\left||\alpha-x|-|\beta-x|\right|=\beta-\alpha$. **(μον.5)**

**Δ5.**Βρείτε για ποιες τιμές ορίζεται η παράσταση

$A=\dfrac{x^2-16}{x^2-4|x|}-\dfrac{x^2+4|x|}{x^2}$ και απλοποιήστε την. **(μον.5)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

## Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Τα σύνολα των αριθμών είναι:

**1.** ΦΥΣΙΚΟΙ : $N=\{0,1,2,3,.......\}$ , $N^*=\{1,2,3,.........\}$.

**2.** ΑΚΕΡΑΙΟΙ : $Z=\{.....-3,-2,-1,0,1,2,3,.......\}$ .

**3.** ΡΗΤΟΙ : $Q=\{\ x=\frac{\alpha}{\beta},\ \alpha\in Z,\ \beta\in Z^*\ \}$.

**4.** ΑΡΡΗΤΟΙ $Q'$ = **{όλοι οι δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά }=** $R-Q$**.**

**5.** ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ : $R=Q\cup Q'$ .

**Α2.1.** $x_1\cdot x_2\cdots x_\nu=0\Leftrightarrow x_1=0$ ή $x_2=0$ ή ...ή $x_\nu=0$

**2.** $x_1\cdot x_2\cdots x_\nu\neq 0\Leftrightarrow x_1\neq$ και $x_2\neq 0$ και $\cdots x_\nu\neq 0$

**3.** $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_\nu^2=0\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_\nu=0$.

**4.** $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_\nu|=0\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_\nu=0$.

**5.** $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_\nu}=0\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_\nu=0$.

**Α3.** Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|x\cdot y|^2=(|x|\cdot|y|)^2\Leftrightarrow(x\cdot y)^2=|x|^2\cdot|y|^2\Leftrightarrow x^2\cdot y^2=x^2\cdot y^2$$

που ισχύει.

**Α4.** 1Λ, 2Λ, 3Σ, 4Λ, 5Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**Εχουμε διαδοχικά:

$x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ ,που ισχύει.

**Β2.** Εχουμε διαδοχικά:

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \overset{xy>0}{\Leftrightarrow} x^2+y^2 \geq 2xy$ που ισχύει ,από το (Β1).

**Β3**.Από Β1 και Β2 έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &\geq 2xy \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x} &\geq 2 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} x^2+y^2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2xy+2 \overset{(\upsilon\pi.)}{\Rightarrow} \frac{15}{2} \geq 2xy+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2xy \leq \frac{15}{2}-2 \Leftrightarrow 2xy \leq \frac{11}{2} \Leftrightarrow xy \leq \frac{11}{4}.$$

**Β4.**Η περίμετρος του σχήματος είναι $\Pi = 4x+2y$.Εχουμε:

$$\left.\begin{aligned} |x-1| &< 0{,}1 \\ |y-4| &< 0{,}2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -0{,}1 < x-1 < 0{,}1 \\ -0{,}2 < y-4 < 0{,}2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 0{,}9 < x < 1{,}1 \\ 3{,}8 < y < 4{,}2 \end{aligned}\right\} \underset{\cdot 2}{\overset{\cdot 4}{\Rightarrow}}$$

$$\left.\begin{aligned} 3{,}6 < 4x < 4{,}4 \\ 7{,}6 < 2y < 8{,}4 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 11{,}2 < 4x+2y < 12{,}8$$ δηλ. 11,2<Π<12,8.

**Β5**.Η παράσταση Α γράφεται:

$A = 5 \cdot \underbrace{(1+5+5^2+\ldots+5^{88}+5^{89})}_{B} = 5 \cdot B$ άρα διαιρείται με το 5.

Η παράσταση Β έχει 90 προσθεταίους άρα 30 τριάδες οπότε γράφεται: $(1+5+5^2)+(5^3+5^4+5^5)+\ldots+(5^{87}+5^{88}+5^{89}) =$

$=(1+5+5^2)+5^3(1+5+5^2)+\ldots+5^{87}(1+5+5^2) =$

$=31+5^3 \cdot 31+\ldots+5^{87} \cdot 31 = 31 \cdot \underbrace{(1+5^3+\ldots+5^{87})}_{\Gamma} = 31 \cdot \Gamma$.

Άρα διαιρείται με το31.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**Εχουμε:

$$x^2+y^2=(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2=\sqrt{3}^2+2\cdot\sqrt{3}+1+\sqrt{3}^2-2\cdot\sqrt{3}+1=$$
$$=3+1+3+1=8\ .$$

**Γ2**.Εχουμε: $\Pi=x^2+y^2+\dfrac{x-y}{xy}\overset{(\Gamma 1)}{=}8+\dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=8+\dfrac{2}{(\sqrt{3})^2-1}=$

$$=8+\frac{2}{3-1}=8+\frac{2}{2}=8+1=9\ .$$

**Γ3**.Εχουμε: $\sqrt{x^4-4y^2+36}+\sqrt{y^4-10x^2+105}=$

$$=\sqrt{x^4-4(8-x^2)+36}+\sqrt{y^4-10(8-y^2)+105}=$$
$$=\sqrt{x^4-32+4x^2+36}+\sqrt{y^4-80+10y^2+105}=$$
$$=\sqrt{x^4+4x^2+4}+\sqrt{y^4+10y^2+25}=\sqrt{(x^2+2)^2}+\sqrt{(y^2+5)^2}=$$
$$=|x^2+2|+|y^2+5|=x^2+2+y^2+5=x^2+y^2+7=8+7=15.$$

**Γ4.**Εχουμε ότι

$$d(2x,1)<1\Leftrightarrow|2x-1|<1\Leftrightarrow-1<2x-1<1\Leftrightarrow 0<2x<2\overset{:2}{\Leftrightarrow}0<x<1.$$

**Γ5.**Είναι $0<x<1\overset{\cdot(x)>0}{\Leftrightarrow}0<x^2<x\overset{\cdot(x)>0}{\Leftrightarrow}0<x^3<x^2$ άρα $x^3<x^2<x<1$. **(1)**

Επίσης $0<x<1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}>1\overset{\cdot(\frac{1}{x})}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{x^2}>\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x^{-2}>x^{-1}>1$ **(2).**

Από τις (1) και (2) έχουμε: $x^3<x^2<x<1<x^{-1}<x^{-2}$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**Η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi=x^2+2xy+y^2-2x+2y-2xy+18=$$
$$=(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)+16=(x-1)^2+(y+1)^2+16\geq 16.$$

Το = ισχύει για x=1 και $y=-1$.

**Δ2.** Αφού Π=16, σύμφωνα με το Δ1 ερώτημα είναι x=1 και $y=-1$.

**Δ3.** Εχουμε ότι

$$\left|x-\sqrt{3}\right|+y^2-2\sqrt{3}\cdot y+3=0 \Leftrightarrow \left|x-\sqrt{3}\right|+y^2-2\sqrt{3}\cdot y+\sqrt{3}^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left|x-\sqrt{3}\right|+(y-\sqrt{3})^2=0 \Leftrightarrow \left|x-\sqrt{3}\right|=0 \text{ και } (y-\sqrt{3})^2=0 \Leftrightarrow$$

$$x-\sqrt{3}=0 \text{ και } y-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=y=\sqrt{3}.$$

Η παράσταση Π έχει τιμή:

$$\Pi=(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})+18=(2\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3})^2+18=$$
$$=12-6+18=24.$$

**Δ4.** Το ότι $x\notin(\alpha,\beta)$ σημαίνει ότι $x\in(-\infty,\alpha)$ ή $x\in(\beta,+\infty)$.

- Αν $x\in(-\infty,\alpha)$ είναι $\alpha-x>0$, $\beta-x>0$ οπότε

$$\left||\alpha-x|-|\beta-x|\right|\left|(\alpha-x)-(\beta-x)\right|=\left|\alpha-x-\beta+x\right|=\left|\alpha-\beta\right|=\beta-\alpha$$

γιατί $\alpha-\beta<0$ .

- Αν $x\in$ $x\in(\beta,+\infty)$ είναι $\alpha-x<0$, $\beta-x<0$ οπότε

$$\left||\alpha-x|-|\beta-x|\right|\left|(x-\alpha)-(x-\beta)\right|=\left|x-\alpha-x+\beta\right|=\left|\beta-\alpha\right|=\beta-\alpha$$

Γιατί $\beta-\alpha>0$.

**Δ5.** Πρέπει $x^2-4|x|\neq 0$ και $x^2\neq 0 \Leftrightarrow |x|^2-4|x|\neq 0$ και $x^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$|x|(|x|-4)\neq 0$ και $x\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 0$ και $|x|\neq 4 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq\pm 4$.

Για την απλοποίηση της παράστασης έχουμε:

$$A=\frac{x^2-16}{x^2-4|x|}-\frac{x^2+4|x|}{x^2}=\frac{|x|^2-4^2}{|x|^2-4|x|}-\frac{|x|^2+4|x|}{|x|^2}=$$

$$=\frac{(|x|-4)\cdot(|x|+4)}{|x|(|x|-4)}-\frac{|x|(|x|+4)}{|x|^2}=\frac{|x|+4}{|x|}-\frac{|x|+4}{|x|}=0.$$