ΩΡΙΑΙΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**
Υλη:Πράξεις-Διάταξη **21-10-2019**

1. Τί ονομάζουμε σύνολο;

2. Να βρείτε το σύνολο των ψηφίων των αριθμών:
$K = 2^5 \cdot 5^7$ και $\Lambda = 4^3 \cdot 25^4$.

3. Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}$, β είναι αντίθετοι να δείξετε ότι και οι αριθμοί
$x = \alpha - \left[-3(\alpha - 2\beta) + 2\beta\right]$ και $y = 2\left[4\beta - (\beta + 2)\alpha - 1\right]$ είναι αντίθετοι.

4. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = \alpha^6 - 1$.

5. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)^3 + 3(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta) + 3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^3 = 8\alpha^3$.

6. Αν $3 < \alpha < 4$ και $2 < \beta < 3$, να αποδείξετε οτι: $3 < \frac{6\alpha + 3\beta}{3\alpha - 2\beta} < 11$.

7. Αν $x < y$ δείξτε ότι $x^5 + x^3 + 2x < y^5 + y^3 + 2y$.

8. Αν α, β θετικοί να δείξετε ότι και $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta}$.

9. Αν $0 < x < y$ να διατάξετε κατά σειρά μεγέθους τους $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x^2 + y^2}{xy}$.

10. Να συγκριθούν οι αριθμοί: $\alpha = 2^{450}$ και $\beta = 3^{300}$.

Τα ερωτήματα είναι όλα των 10 μονάδων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

1.Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων , που προέρχονται απ' την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας , είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο .Τα αντικείμενα αυτά που αποτελούν το σύνολο ονομάζονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου.

2.Eιναι: $K = 2^5 \cdot 5^7 = 2^5 \cdot 5^5 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^5 \cdot 5^2 = (10)^5 \cdot 25 = 100000 \cdot 25 =$
$= 2500000$.

Το σύνολο των ψηφίων του Κ είναι $A = \{0, 2, 5\}$.

Επίσης: $\Lambda = 4^3 \cdot 25^4 = 4^3 \cdot 25^3 \cdot 25 = (4^3 \cdot 25^3) \cdot 25 = (4 \cdot 25)^3 \cdot 25 =$
$= 100^3 \cdot 25 = 1000000 \cdot 25 = 25000000$.

Το σύνολο των ψηφίων του Λ είναι $B = \{0, 2, 5\}$.

3. Αφού οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}$ και β είναι αντίθετοι θα έχουν άθροισμα μηδέν,

Δηλαδή $\frac{1}{\alpha} + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = -1$ **(1)**

Είναι: $x + y = \alpha - [-3(\alpha - 2\beta) + 2\beta] + 2 \cdot [4\beta - (\beta + 2) \cdot \alpha - 1] =$

$= \alpha - [-3\alpha + 6\beta + 2\beta] + 2 \cdot [4\beta - \alpha\beta - 2\alpha - 1] =$

$= \alpha + 3\alpha - 6\beta - 2\beta + 8\beta - 2\alpha\beta - 4\alpha - 2 = -2\alpha\beta - 2 \overset{(1)}{=} -2 \cdot (-1) - 2 = 0$.

Αρα οι x και y είναι αντίθετοι.

4. Εχουμε:

$(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) \cdot (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) =$
$= (\alpha^3 - 1) \cdot (\alpha^3 + 1) = (\alpha^3)^2 - 1^2 = \alpha^6 - 1$.

5. Εχουμε: $(\alpha + \beta)^3 + 3(\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta) + 3(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^3 =$
$= [(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]^3 = (2\alpha)^3 = 8\alpha^3$.

6. Είναι:

$$\left.\begin{array}{l}3<\alpha<4\\2<\beta<3\end{array}\right\}\overset{\cdot(6)}{\underset{\cdot(3)}{\Rightarrow}}\left.\begin{array}{l}18<6\alpha<24\\6<3\beta<9\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}24<6\alpha+3\beta<33\ \textbf{(1)}$$

Επίσης:

$$\left.\begin{array}{l}3<\alpha<4\\2<\beta<3\end{array}\right\}\overset{\cdot(3)}{\underset{\cdot(-2)}{\Rightarrow}}\left.\begin{array}{l}9<3\alpha<12\\-4>-2\beta>-6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}9<3\alpha<12\\-6<-2\beta<-4\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}3<3\alpha-2\beta<8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{8}<\frac{1}{3\alpha-2\beta}<\frac{1}{3}\ \textbf{(2)}$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{24}{8}<\frac{6\alpha+3\beta}{3\alpha-2\beta}<\frac{33}{3}\Leftrightarrow 3<\frac{6\alpha+3\beta}{3\alpha-2\beta}<11.$$

7. Εχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}x<y\\x<y\\x<y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x^5<y^5\\x^3<y^3\\x<y\end{array}\right\}\overset{(=)}{\Rightarrow}x^5+x^3+x<y^5+y^3+y\ .$$

8. Εχουμε: $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}=\dfrac{\alpha}{1+\alpha+\beta}+\dfrac{\beta}{1+\alpha+\beta}<\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{\beta}{1+\beta}$ γιατί τα τελευταία κλάσματα έχουν μικρότερους παρονομαστές από τα αμέσως προηγούμενα.

9. Επειδή $0<x<y$ θα είναι και $\dfrac{x}{y}<1$ και $\dfrac{y}{x}>1$.

Επίσης: $\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{x^2}{xy}+\dfrac{y^2}{xy}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ οπότε $\dfrac{x}{y}<\dfrac{y}{x}<\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

10.Είναι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2^{450}}{3^{300}}=\dfrac{(2^3)^{150}}{(3^2)^{150}}=\left(\dfrac{8}{9}\right)^{150}<1$ επομένως $2^{450}<3^{300}$.