ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **101**

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη:Το σύνολο R- Εξισώσεις-Ανισώσεις **16-02-19**

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ **,** με $\alpha \neq 0$**.**

α.1.Πότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες ;

2.Πότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα ;

3.Πότε είναι αδύνατη; **(μον.3)**

β. Αν x_1 και x_2 ρίζες της εξίσωσης , να αποδείξετε ότι

1. $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ **2.** $x_1 \cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ **(μον.6)**

Β. Να συμπληρώσετε τις προτάσεις :

1. Αν θ>0 τότε :

- $|x|=\theta \Leftrightarrow$ ……. ….
- $|x|>\theta \Leftrightarrow$ …….

2. $|\alpha+\beta| \leq$ ……

3. Αν $\alpha \geq 0$ και $\sqrt[\nu]{\alpha}=x \Leftrightarrow \alpha=$ …..

4. $\sqrt{\alpha^2}=$ …..

5. $\alpha x=\beta$ και $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow x=$ ….. **(μον.5)**

Γ. Να ορίσετε ως (Σ) η (Λ) τις προτάσεις :

1. Αν $\alpha \cdot \beta<0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}<0$ **Σ Λ**

2. Ισχύει : $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^3<\beta^3$ **Σ Λ**

3. $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}$ **Σ Λ**

4. Η εξίσωση $(\alpha-1)\cdot x=\alpha(\alpha-1)$ έχει μοναδική λύση x=α **Σ Λ**

5. Οι εξισώσεις $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ και $x^2-3x+2=0$ είναι ισοδύναμες. **Σ Λ**

(μον.5)

Δ. Να γράψετε ένα παράδειγμα ταυτότητας , εξίσωσης , ανισότητας, ανίσωσης. **(μον.2)**

Ε. Να γράψετε ένα παράδειγμα εξίσωσης της μορφής αx=β που είναι αδύνατη και ένα που είναι ταυτότητα. **(μον.2)**

ΣΤ. Τι συμπέρασμα βγάζετε από την πρόταση :
«η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ισχύει για κάθε $x \in R$. **(μον.2)**

Θέμα 2ο:

Α. Να αποδείξετε ότι : $2\alpha^2+2\alpha+1>0$. **(μον.7)**

Β. Αν $\alpha^2+\beta^2+2=2(\beta-\alpha)$ **,** να βρείτε τους α , β **(μον.8)**

Γ. Έστω $\alpha,\beta \in R$ με $|\alpha| \le 2$ **,** $|\beta| \le 3$**.**
Να γράψετε την παράσταση $A=|\alpha+3|+|\beta-4|-7$
χωρίς απόλυτες τιμές. **(μον.8)**

Δ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης :
$$A=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$ **(μον.7)**

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-2)\cdot x^2+2x-\lambda+4=0, \quad \lambda \in R$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε ρίζες .
2. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα , την οποία και να βρείτε .
3. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες .
4. Αν x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης και $x_1^2+x_2^2=10$, να βρείτε το λ. **(μον.4x5=20)**

Β. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2x^2-8x+8}{x^2-3x+2}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-1}{x^2-2x+1}$ **(μον.5)**

Θέμα 4ο

Α. Να βρείτε για ποιες ακέραιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $K=\sqrt{5-|1-x|}+\sqrt{|x+2|-1}$ **(μον.9)**

Β. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=(\lambda+1)x^2+4x+\lambda-2$ **,** $\lambda\neq-1$
Να βρείτε το λ , ώστε το τριώνυμο να είναι πάντα θετικό **(μον.7)**

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση
$h(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{12-x-x^2}$ **(μον.9)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

Α. Θεωρία

Β. 1. • $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \pm\theta$ • $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$

2. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

3. $\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow \alpha = x^{\nu}$

4. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

5. $\alpha x = \beta$ και $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\beta}{\alpha}$

Γ. 1Σ, 2Σ, 3Λ, 4Λ, 5Λ

Δ. Ταυτότητα: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

Εξίσωση: $2x + 3 = 7$

Ανισότητα: $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

Ανίσωση: $4x \geq 8$

Ε. Αδύνατη: $0x = 5$ **Ταυτότητα:** $0x = 0$

ΣΤ. Αν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \in R$ τότε $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$

Θέμα 2ο:

Α. $2\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha^2 + 2\alpha + 1) > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha+1)^2 > 0$

που ισχύει.

Β. Εχουμε: $\alpha^2+\beta^2+2=2(\alpha-\beta) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2-2\beta-2\alpha=0 \Leftrightarrow$
$\alpha^2+\beta^2+1+1-2\beta-2\alpha=0 \Leftrightarrow (\alpha^2+2\alpha+1)+(\beta^2-2\beta+1)=0 \Leftrightarrow$
$(\alpha+1)^2+(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2=0$ και $(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow$ **$\alpha=-1$ και $\beta=1$**

Γ. Εχουμε:
$$|\alpha| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \alpha \leq 2, \text{ άρα } 1 \leq \alpha + 3 \leq 5$$
$$|\beta| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq \beta \leq 3, \text{ άρα } -7 \leq \beta - 4 \leq -1$$

Ετσι: $A = |\alpha+3| + |\beta-4| - 7 = (\alpha+3) + (-\beta+4) - 7 = \alpha - \beta$

Δ.Είναι

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} - \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - \frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})} - \frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} - \frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2} - \frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1} - \frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{18-12} - \frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{10} =$$

$$= 2(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} = 0.$$

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. 1. ●Αν λ=2 η εξίσωση γίνεται 2x+2=0 άρα x=−1.

●Αν $\lambda \neq 2$ εξίσωση είναι 2ου βαθμού και έχει

$$\Delta = 2^2 - 4(\lambda-2)(-\lambda+4) = 4 + 4\lambda^2 - 16\lambda - 8\lambda + 32 =$$

$$4\lambda^2 - 24\lambda + 36 = 4(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 4(\lambda-3)^2 \geq 0.$$

Αρα έχει πάντοτε ρίζες.

2. Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα όταν Δ=0 άρα όταν $4(\lambda-3)^2=0$ δηλ. **λ=3.**

Η διπλή ρίζα είναι η $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2(3-2)} = \mathbf{-1}$

3. Ανισες είναι οι ρίζες όταν Δ>0 δηλ. όταν $\boldsymbol{\lambda \neq 3}$.

4.Εχουμε ότι:

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \text{ δηλ. } (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \overset{Vieta}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[-\frac{2}{2(\lambda-2)^2}\right]^2 - 2\frac{-\lambda+4}{\lambda-2} = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{(\lambda-2)^2} + \frac{2\lambda-8}{\lambda-2} = 10$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 2 + (2\lambda-8)(\lambda-2) = (\lambda-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - 2 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8\lambda + 16 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 2}$ **ή** $\boldsymbol{\lambda = 5}$.

Β. Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{2(x^2-4x+4)}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-1}{(x-1)^2}\overset{x\neq 1}{\underset{x\neq 2}{\Leftrightarrow}}\frac{2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2(x-2)}{x-1}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow 2(x-2)^2-(x+4)(x-1)=x-2\Leftrightarrow$$

$$2x^2-8x+8-x^2+x-4x+4-x+2=0\Leftrightarrow x^2-12x+14=0.$$

Η εξίσωση έχει $\Delta=(-12)^2-4.1.14=144-56=88$ και επομένως ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{88}}{2}=\frac{12\pm 2\sqrt{22}}{2}=6\pm\sqrt{22}$$, δεκτές και οι δύο.

Θέμα 4ο:

Α. Πρέπει: $5-|1-x|\geq 0$ **(1)** και $|x+2|\geq 0$ **(2)**.

Από (1) είναι:

$|1-x|\leq 5\Leftrightarrow -5\leq 1-x\leq 5\Leftrightarrow -6\leq -x\leq 4\Leftrightarrow -4\leq x\leq 6$ **(3)**

Από (2) είναι:

$|x+2|\geq 1\Leftrightarrow x+2\leq -1$ ή $x+2\geq 1\Leftrightarrow x\leq -3$ ή $x\geq -1$ **(4)**

Απ΄ τη συναλήθευση των (3) και (4) έχουμε:

$-4\leq x\leq -3$ ή $-1\leq x\leq 6$

Επειδή x ακέραιος είναι: x= −4, −3, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Β. Το τριώνυμο έχει

$$\Delta=4^2-4(\lambda+1)(\lambda-2)=16-4\lambda^2+8\lambda-4\lambda+8=-4\lambda^2+4\lambda+24=$$

$$=-4(\lambda^2-\lambda-6)$$

Για να είναι το τριώνυμο **πάντα** θετικό πρέπει Δ<0 και α>0 δηλ.

$$\begin{cases}-4(\lambda^2-\lambda-6)<0\\ \lambda+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^2-\lambda-6>0\\ \lambda>-1\end{cases}\overset{\text{ομόσ.}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}\lambda<-2 \text{ ή } \lambda>3\\ \lambda>-1\end{cases}$$ άρα **λ>3.**

Γ. Η παράσταση h ορίζεται όταν:

$$\begin{cases}x^2-4\geq 0\\ 12-x-x^2\geq 0\end{cases}\overset{\text{ομόσ}}{\underset{\text{ετερ}}{\Longleftrightarrow}}\begin{cases}x\leq -2 \text{ ή } x\geq 2\\ -4\leq x\leq 3\end{cases}$$ άρα $-4\leq x\leq -2$ ή $2\leq x\leq 3$.