ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

100

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη:Το σύνολο R-Εξισώσεις **9-12-2017**

ΘΕΜΑ Α

Α1.Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta \in R$ ισχύει $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$.
Πότε ισχύει η ισότητα; **(μον.9)**

Α2.Τι ονομάζεται ταυτότητα και τι εξίσωση με άγνωστο x; **(μον.5)**

Α3.Πότε ορίζεται η παράσταση $\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ και πότε ισχύει η ισότητα
$\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$; **(μον.3)**

Α4.Για ποιες τιμές του x ισχύει $d(x,2)+|x-5|=3$; **(μον.3)**

Α5.Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις:

1. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}$ Σ Λ

2. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$ Σ Λ

3. $5^{25}>25^5$ Σ Λ

4. $(\alpha^2-1)^2+(\alpha+1)^2>0$ Σ Λ

5.Η εξίσωση $(\lambda^2+1)\cdot x=\lambda+1$ έχει μοναδική λύση ως προς
x για κάθε $\lambda \in R$. Σ Λ

(μον.5)

ΘΕΜΑ Β

Β1.Να λυθεί η εξίσωση $\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x}=\frac{x-4}{x^2+2x}$ **(μον.10)**

Β2.Αν $x<y$ δείξτε ότι $2x^3+3x<2y^3+3y$. **(μον.8)**

Β3.Αν $|\alpha|<2$ να δείξετε ότι $\left|4-|\alpha-2|\right|=\alpha+2$. **(μον.7)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Οι πλευρές ορθογωνίου είναι $\alpha=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ και $\beta=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

1.Βρείτε την περίμετρό του. **(μον.7)**

2.Βρείτε το εμβαδό του. **(μον.4)**

3.Βρείτε τη διαγώνιό του. **(μον.4)**

Γ2.Αν $(\alpha-1)^2<1$ και $(\beta-1)^2\leq 4$ δείξτε ότι $-1<2\alpha+\beta<7$. **(μον.5)**

Γ3.Αν η εξίσωση $(\lambda^2+\lambda)\cdot x=\lambda^2+3\lambda+2$ έχει άπειρες λύσεις δείξτε ότι η εξίσωση $(\lambda^{2016}-1)\cdot x=\lambda^{2017}-1$ είναι αδύνατη. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha^2+\beta^2=4\beta-4$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι α=0 και β=2. **(μον.6)**

Δ2.Αν $\alpha<x<\beta$ και $K=\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ αποδείξτε ότι Κ=2. **(μον.6)**

Δ3.Αν $\Lambda=\sqrt[3]{(\beta+1)\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[4]{9}}$, αποδείξτε ότι Λ=3. (μον.5)

Δ4.Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\sqrt{y^2+4-4y}}{K}-\frac{5}{\Lambda}=\frac{|2-y|}{\Lambda}$. **(μον.6)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2 Θεωρία.

Α3. Η παράσταση $\sqrt{\alpha\beta}$ ορίζεται όταν $\alpha\cdot\beta\geq 0$ δηλ. όταν οι α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον είναι μηδέν.

Η ισότητα $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ ισχύει όταν $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$.

Α4. Η ισότητα $d(x,2)+|x-5|=3$ γράφεται $|x-2|+|x-5|=3$ και σημαίνει ότι η απόσταση, πάνω στον x΄x, του x από το 2 και το 5 είναι 3. Αρα $2\leq x\leq 5$.

Α5. **1. Σωστό**, γιατί $(2+\sqrt{5})^2=2^2+\sqrt{5}^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}=9+4\cdot\sqrt{5}$

2. Λάθος. Το σωστό είναι $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

3. Σωστό. $5^{25}>25^5\Leftrightarrow 5^{25}>(5^2)^5\Leftrightarrow 5^{25}>5^{10}$, ισχύει.

4. Λάθος. Το σωστό είναι $(\alpha^2-1)^2+(\alpha+1)^2\geq 0$ με το $=$ να ισχύει όταν $\alpha=-1$.

5. Σωστό. Είναι $\lambda^2+1>0$ άρα $x=\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2+1}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εχουμε: $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-4}{x^2+2x}\Leftrightarrow\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-4}{x(x+2)}\overset{\text{ΕΚΠ:}x(x+2)}{\underset{x\neq 0\ k\ x\neq -2}{\Longleftrightarrow}}$

$3x-2(x+2)=x-4\Leftrightarrow 3x-2x-4=x-4\Leftrightarrow 0x=0$.

Αρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα $x\in R$ με $x\neq 0$ και $x\neq -2$.

Β2. Θα δείξουμε ότι $2x^3+3x<2y^3+3y\Leftrightarrow 2x^3-2y^3+3x-3y<0\Leftrightarrow$ $2(x^3-y^3)+3(x-y)<0\Leftrightarrow 2(x-y)(x^2+xy+y^2)+3(x-y)<0\Leftrightarrow$ $(x-y)\cdot[2(x^2+xy+y^2)+3]<0$ που ισχύει γιατί $x<y$ άρα $x-y<0$ και $x^2+xy+y^2+3>0$.

Β3. Αφού $|\alpha|<2\Leftrightarrow -2<\alpha<2$ άρα $\alpha-2<0$ και $\alpha+2>0$.

Είναι: $\left|4-|\alpha-2|\right|=|4-(-\alpha+2)|=|\alpha+2|=\alpha+2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

1. Η περίμετρος είναι $\Pi = 2(\alpha+\beta) = 2\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right) =$

$$=2\left(\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\right)=2(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2})=4\sqrt{3}.$$

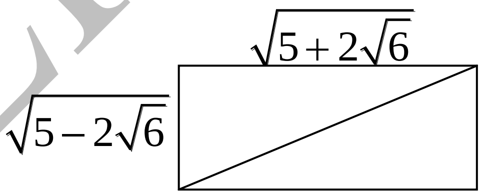
Αρα $\Pi=4\sqrt{3}$.

2. Το εμβαδό είναι

$$E=\alpha\cdot\beta=\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(5+2\sqrt{6})\cdot(5-2\sqrt{6})}=$$

$$=\sqrt{5^2-(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{25-24}=1$$

3. Από το Π.Θ. ισχύει:



$$\delta^2=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2=$$

$$=\quad 5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}=10$$

άρα $\delta=\sqrt{10}$.

Γ2. • $(\alpha-1)^2<1 \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2}<1 \Rightarrow |\alpha-1|<1 \Rightarrow -1<\alpha-1<1 \Rightarrow 0<\alpha<2$ **.**

• $(\beta-1)^2\le 4 \Rightarrow \sqrt{(\beta-1)^2}\le\sqrt{4} \Rightarrow |\beta-1|\le 2 \Rightarrow -2\le\beta-1\le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1\le\beta\le 3$**.**

Αφού $\left.\begin{array}{r}0<\alpha<2\\ -1\le\beta\le 3\end{array}\right| \overset{\cdot(2)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r}0<2\alpha<4\\ -1\le\beta\le 3\end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} -1<2\alpha+\beta<7$.

Γ3.Αφού η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις θα είναι:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^2+\lambda=0\\ \lambda^2+3\lambda+2=0\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\lambda(\lambda+1)=0\\ (\lambda+1)(\lambda+2)=0\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-1\\ \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=-2\end{array}\right| \Rightarrow \lambda=-1$$

Για $\lambda=-1$ η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=(-1)^{2017}-1$ δηλ.

$0\cdot x=-2$, άρα αδύνατη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Εχουμε ότι $\alpha^2+\beta^2=4\beta-4 \Leftrightarrow \alpha^2+(\beta^2-4\beta+4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2+(\beta-2)^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2=0$ και $(\beta-2)^2=0 \Leftrightarrow$ $\alpha=0$ και $\beta=2$.

Δ2.Είναι $0<x<2$ άρα και $x-3<0$ οπότε:

$$K=\frac{|x|}{x}-\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\frac{|x|}{x}-\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{x}{x}-\frac{-(x-3)}{x-3}=1-(-1)=2$$

δηλ. $K=2$

Δ3.Είναι: $\Lambda=\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{27\cdot\sqrt[4]{9}}}=\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3^2\cdot 3\cdot\sqrt[4]{3^2}}}=\sqrt[3]{3\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3^3}=3$

δηλ. $\Lambda=3$.

Δ4.Η εξίσωση γράφεται: $\dfrac{\sqrt{(y-2)^2}}{2}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{|2-y|}{3} \Leftrightarrow \dfrac{|y-2|}{2}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{|y-2|}{3} \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}$

$3\cdot|y-2|-10=2\cdot|y-2| \Leftrightarrow |y-2|=10 \Leftrightarrow y-2=10$ ή $y-2=-10 \Leftrightarrow$

$y=12$ ή $y=-8$.